M7 : Reconnaître un ensemble de points

Objectif : Résoudre graphiquement une équation en déterminant la trajectoire d'un point $M(z)$ dans le plan

Equation du type $|z - z_A| = |z - z_B|$ (module = module)

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est la médiatrice du segment $[AB]$

Remarque : graphiquement, $|z - z_A|$ *est la longueur* AM *et* $|z - z_B|$ *la longueur* BM *donc* $|z_A - z| = |z_B - z| \Leftrightarrow MA = MB$ *et l'ensemble des points toujours à égale distance de* A *et de* B *est bien la médiatrice du segment* $[AB]$

Equation du type $|z - z_A| = R$ (module = réel)

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est le cercle de centre A et de rayon R

Remarque : graphiquement, $|z - z_A|$ *est la longueur* AM *et l'ensemble des points toujours à égale distance* R *d'un point fixe* A *est bien* le cercle de centre A et de rayon R

Equation du type $arg(z - z_A) = \theta \; [\pi]$ (argument = angle modulo π)

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est la droite (AM) privée du point A

Remarque : graphiquement, $arg(z - z_A)$ *est l'angle* $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ *et l'ensemble des points vérifiant* $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \theta + k\pi$ *est bien la droite* (AM) *privée du point* A *(car si* $M = A$ *alors* $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AA}) = 0 \neq \theta$*)*

Equation du type $arg(z - z_A) = \theta \; [2\pi]$ (argument = angle modulo 2π)

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est la demi-droite $[AM)$ privée du point A

Cas particuliers à connaître :

- **Equation du type** $arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est le cercle de diamètre $[AC]$, privé des points A et B

Remarque : graphiquement, $arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)$ *est l'angle* $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$ *et l'ensemble des points vérifiant* $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}$ *est le cercle de diamètre* $[AC]$*, privé des points* A *et* C*. En effet si un triangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté de ce triangle est rectangle.*

- Si $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est un réel : l'ensemble parcouru par $M(z)$ est la droite (AB) privée de B

- Si $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ est un imaginaire pur : l'ensemble parcouru par $M(z)$ est le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B

Exemple 1
Soient A d'affixe $z_A = 2 - i$ et B d'affixe $z_B = 5 + 2i$. Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert 2 - i - z\rvert = \lvert 5 + 2i - z\rvert$

$\lvert 2 - i - z\rvert = \lvert 5 + 2i - z\rvert \Leftrightarrow \lvert z_A - z\rvert = \lvert z_B - z\rvert$

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est donc la médiatrice du segment $[AB]$

Exemple 2
Soit Ω d'affixe $1 + 2i$ Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert z - (1 + 2i)\rvert = 2$

$\lvert z - (1 + 2i)\rvert = 2 \Leftrightarrow \lvert z - z_\Omega\rvert = 2$

L'ensemble parcouru par $M(z)$ est le cercle de centre Ω et de rayon 2