<u>Problème 1</u> :

1.
   a. p_1 est la probabilité que Pierre perde la 1ère partie. On a supposé que Pierre et Claude avaient la même probabilité de gagner la 1ère partie : ils ont donc logiquement la même probabilité de la perdre, donc $p_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
   $P_{G_1}(G_2) = 0{,}7$: c'est la probabilité énoncée en hypothèse que Pierre gagne la deuxième partie en supposant qu'il ait gagné la première.
   Par suite, $P_{P_1}(G_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. En effet, la probabilité que Pierre perde la deuxième partie en supposant qu'il ait perdu la première est 0,8 : la probabilité qu'il gagne la deuxième est donc exactement son complémentaire.

   b. Les évènements P_n et G_n sont complémentaires. $P(P_n) = 1 - P(G_n) \Leftrightarrow P(P_n) + P(G_n) = 1 \Leftrightarrow p_n + q_n = 1$

   c. Démontrons par récurrence que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$
   <u>Initialisation</u> : $p_2 = P(G_2) = P_{G_1}(G_2)xP(G_1) + P_{P_1}(G_2)xP(P_1)$ à l'aide des probas totales. On trouve $p_2 = 0{,}7x0{,}5 + 0{,}2x0{,}5 = 0{,}45$.
   D'autre part, $0{,}5p_1 + 0{,}2 = 0{,}5x0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}45$.
   On a donc bien $p_2 = 0{,}5p_1 + 0{,}2$
   <u>Hérédité</u> : Supposons que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.
   On a $p_{n+2} = P(G_{n+2}) = P_{G_{n+1}}(G_{n+2})xP(G_{n+1}) + P_{P_{n+1}}(G_{n+2})xP(P_{n+1}) = 0{,}7xp_{n+1} + 0{,}2x(1 - p_{n+1}) = 0{,}7p_{n+1} + 0{,}2 - 0{,}2p_{n+1} = 0{,}5p_{n+1} + 0{,}2$
   La relation de récurrence est donc prouvée.
   N.B : La récurrence n'était pas essentielle, dans le sens ou l'on ne se sert pas de la relation supposée précédemment.

2.
   a. $v_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = 0{,}5p_n + 0{,}2 - \frac{2}{5} = 0{,}5p_n - 0{,}2 = 0{,}5\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = 0{,}5v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.
   De plus, $v_n = (0{,}5)^n x v_1 = (0{,}5)^n x(p_1 - \frac{2}{5}) = (0{,}5)^n x(0{,}5 - \frac{2}{5}) = 0{,}1(0{,}5)^n$

   b. $v_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc $p_n = v_n + \frac{2}{5} = 0{,}1(0{,}5)^n + 0{,}4$

   c. $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty}(0{,}1(0{,}5)^n + 0{,}4) = 0{,}4$ car $\lim_{n\to+\infty}(0{,}5)^n = 0$

<u>Problème 2</u> :

1. On dira que $(p_k)_{k\in\{1,2,3,4\}}$ suit une progression arithmétique si et seulement si on peut trouver un réel a tel que $p_{k+1} = p_k + a$.
   ce qui implique que $p_4 = p_3 + a$; $p_3 = p_2 + a$; $p_2 = p_1 + a$
   Or $p_4 = 0{,}4$. On déduit du système précédent que $a = 0{,}1$ et donc
   $$p_1 = 0{,}1 \; ; \; p_2 = 0{,}2 \; ; \; p_3 = 0{,}3$$

2.
   a. On lance le dé trois fois de suite. Notons pour commencer que la notion d'arrangements (à laquelle pourrait nous faire penser le mot 'ordre' de l'énoncé) est inutilisable ici puisque les tirages ne sont **pas équiprobables**.

Il faut dès lors regarder les probabilités tirage après tirage. La probabilité recherchée est P('obtenir un 1' et 'obtenir un 2' et 'obtenir un 4') = P('obtenir un 1' ∩ 'obtenir un 2' ∩ 'obtenir un 4') $= p_1 x p_2\, x p_4$ puisque les tirages sont indépendants deux à deux.
Au final, la probabilité recherchée est égale à $0{,}1x0{,}2x0{,}4 = 0{,}008$
N.B : Notons que ce résultat aurait été identique pour un triplet {4,2,1} par exemple.

b. Ici il va falloir énumérer toutes les possibilités répondant à l'énoncé :
La probabilité d'obtenir le triplet {1,2,3} est $0{,}1x0{,}2x0{,}3 = 0{,}006$
La probabilité d'obtenir le triplet {1,2,4} est $0{,}1x0{,}2x0{,}4 = 0{,}008$
La probabilité d'obtenir le triplet {2,3,4} est $0{,}2x0{,}3x0{,}4 = 0{,}024$
Au final, la probabilité d'obtenir l'un ou l'autre de ces trois triplets est donc $0{,}006 + 0{,}008 + 0{,}024 = 0{,}038$

3.

a. La probabilité d'obtenir un 4 en un unique lancer est $p_4 = 0{,}4$
La probabilité d'obtenir tout sauf un 4 en un unique lancer est donc $1 - p_4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
Il est donc possible de restreindre le lancer de ce dé à un schéma de Bernouilli. Si le succès est d'obtenir un 4, on constate qu'un unique lancer suit une loi de Bernouilli de paramètre 0,4.
On répète ce schéma à 10 reprises : on se retrouve dès lors dans le cadre d'une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4 : $X \sim B(10; 0{,}4)$.
On en déduit au final que $P(X = i) = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (0{,}4)^i (0{,}6)^{10-i}$

b. Si X suit une loi binomiale, alors $E(X) = np$ (voir cours pour la démonstration)
On en déduit que $E(X) = 10x0{,}4 = 4$
Ce résultat signifie que si l'on lance à 10 reprises un tel dé, l'on peut espérer obtenir quatre faces marquées '4'.

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{0} (0{,}4)^0 (0{,}6)^{10-0} = 1 - (0{,}6)^{10} = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$

4.

a. Exprimons tout d'abord U_n en fonction de n.
La probabilité U_n est celle d'obtenir $n - 1$ échecs avant un succès. (il s'agit de la loi géométrique, non étudiée en terminale). On en déduit $U_n = (0{,}6)^{n-1} x0{,}4$
Par suite, $U_{n+1} = (0{,}6)^n x0{,}4 = 0{,}6x\, (0{,}6)^{n-1} x0{,}4 = 0{,}6U_n$.
La suite (U_n) est donc géométrique de raison 0,6.
De plus, $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (0{,}5)^{n-1} x0{,}4 = 0$
La suite (U_n) est donc convergente, de limite 0.

b. $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i =$
$\sum_{i=1}^{n} (0{,}5)^{i-1} x0{,}4 = 0{,}4\,x \sum_{i=1}^{n} (0{,}5)^{i-1} = 0{,}4 \sum_{i=0}^{n-1} (0{,}5)^i = 0{,}4x \frac{1-(0{,}5)^n}{1-0{,}5} = \frac{0{,}4}{0{,}5} (1 - (0{,}5)^n) = 0{,}8 - 0{,}8(0{,}5)^n$
Enfin, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (0{,}8 - 0{,}8(0{,}5)^n) = 0{,}8$
La suite (S_n) est donc convergente, de limite 0,8.

c. On cherche n_0 tel que $S_{n_0} > 0{,}999$, c'est-à-dire $0{,}8 - 0{,}8(0{,}5)^{n_0} > 0{,}999 \Leftrightarrow -0{,}8(0{,}5)^{n_0} > 0{,}199 \Leftrightarrow (0{,}5)^{n_0} < -\frac{0{,}199}{0{,}8} \Leftrightarrow e^{n_0 \ln(0{,}5)} < -0{,}2488$??

Problème 3 :

1. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
   Ici, $\vec{U} \cdot \vec{V} = a(1+b) - 5 + (1-a)b = a + ab - 5 + b - ab = a + b - 5$
   La condition nécessaire et suffisante à l'orthogonalité de ces deux vecteurs est $a + b - 5 = 0$, c'est-à-dire $a + b = 5$
   De combien de façons peut on obtenir 5 en additionnant a et b ?
   - Si $a = 1$ et $b = 4$: la probabilité de ce cas de figure est $\frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
   - Si $a = 2$ et $b = 3$: la probabilité de ce cas de figure est $\frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
   - Si $a = 3$ et $b = 2$: la probabilité de ce cas de figure est $\frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
   - Si $a = 4$ et $b = 1$: la probabilité de ce cas de figure est $\frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

   On en déduit que la probabilité d'orthogonalité est $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

2.
   a. La probabilité de l'évènement A_1 est celle que A obtienne des vecteurs orthogonaux et que B n'en obtienne pas : elle est donc $P(A_1) = \frac{1}{4} x \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$
   La probabilité de l'évènement B_1 est celle que A n'obtienne pas de vecteurs orthogonaux et que B en obtienne : elle est donc $P(B_1) = \frac{3}{4} x \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
   La probabilité de l'évènement C_1 est celle que ni A ni B n'obtiennent de vecteurs orthogonaux ou que A et B obtiennent tous deux des vecteurs orthogonaux : elle est donc $P(C_1) = \frac{3}{4} x \frac{3}{4} + \frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

   b. Il s'agit ici d'écrire une suite : il sera astucieux d'écrire les premiers rangs, de dégager une logique, puis seulement de généraliser au rang n.
   Le jeu continue à l'issue de la 2ème partie si et seulement si le jeu à continué après la 1ère partie et si à l'issue de la 2ème partie aucun des deux joueurs n'a gagné.
   On en déduit que $P(C_2) = \frac{5}{8} P(C_1) = \frac{5}{8} x \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$.
   En généralisant, on obtient $P(C_{n+1}) = \frac{5}{8} P(C_n)$
   On reconnaît en $(P(C_n))$ une suite géométrique de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme $\frac{5}{8}$.
   On en déduit donc que $P(C_n) = (\frac{5}{8})^n$
   De la même manière, $P(A_2) = \frac{3}{16} P(C_1) = \frac{3}{16} x \frac{5}{8} = \frac{15}{128}$ et par suite $P(A_{n+1}) = \frac{3}{16} P(C_n)$
   Au final, $P(A_n) = \frac{3}{16} P(C_{n-1}) = \frac{3}{16} (\frac{5}{8})^{n-1}$

3.
   a. $\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{16} (\frac{5}{8})^{n-1} = 0$
   En effet $\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 \; si -1 < q < 1 \\ +\infty \; sinon \end{cases}$ et on a bien $-1 < \frac{5}{8} < 1$

   b. $P(A_n) \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{3}{16} (\frac{5}{8})^{n-1} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow (\frac{5}{8})^{n-1} \leq \frac{0{,}01}{3/16} \Leftrightarrow e^{(n-1)\ln\left(\frac{5}{8}\right)} \leq 0{,}053 \Leftrightarrow$
   $(n-1)\ln\left(\frac{5}{8}\right) \leq \ln(0{,}053) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}053)}{\ln(5/8)} + 1 \Leftrightarrow n \geq 7{,}25$
   Le plus petit entier pour lequel l'inégalité est vraie est donc $n = 8$

Problème 4 :

1.
   a. Arbre à recopier
   b. La variable X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.
   La probabilité que les deux premiers feux soient rouges ou orange est $P(X=0) = P(E_1 \cap E_2) = P_{E_1}(E_2)xP(E_1) = \frac{1}{20}x\frac{1}{8} = \frac{1}{160}$.
   La probabilité que l'un des deux premiers feux soit rouge ou orange est $P(X=1) = P\left((E_1 \cap \overline{E_2}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2)\right) = P\left((E_1 \cap \overline{E_2})\right) + P((\overline{E_1} \cap E_2)) = P_{E_1}(\overline{E_2})xP(E_1) + P_{\overline{E_1}}(E_2)xP(\overline{E_1}) = \frac{19}{20}x\frac{1}{8} + \frac{9}{20}x\frac{7}{8} = \frac{19+63}{160} = \frac{82}{160} =$.
   La probabilité que les deux premiers feux soient verts est $P(X=2) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P_{\overline{E_1}}(\overline{E_2})xP(\overline{E_1}) = \frac{11}{20}x\frac{7}{8} = \frac{77}{160}$.
   Au final la loi de probabilité de X est :

X	0	1	2
$P(X = X_{i)}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{82}{160}$	$\frac{77}{160}$

   c. $E(X) = 0x\frac{1}{160} + 1x\frac{82}{160} + 2x\frac{77}{160} = \frac{59}{40}$
2. Dd
   a. $P_{E_n}(E_{n+1})$ est la probabilité qu'Amélie soit arrêtée par un feu rouge ou orange sachant qu'elle l'a déjà été au feu précédent. Par hypothèse elle est de $\frac{1}{20}$.
   $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$ est la probabilité qu'Amélie soit arrêtée par un feu rouge ou orange sachant qu'elle ne l'a pas été au feu précédent. Par hypothèse elle est de $\frac{9}{20}$.
   b. Puisque E_n et $\overline{E_n}$ forment une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales : $P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) = P_{E_n}(E_{n+1})xP(E_n) + P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})xP(\overline{E_n})$ dont on déduit directement que $p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$
   c. Puisque $q_n = 1 - p_n$, on a $p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}(1-p_n) = -\frac{8}{20}p_n + \frac{9}{20} = -\frac{2}{5}p_n + \frac{9}{20}$
3. Dd
   a. On donne $U_n = 28p_n - 9$ donc $U_{n+1} = 28p_{n+1} - 9 = 28\left(-\frac{2}{5}p_n + \frac{9}{20}\right) - 9 = -\frac{56}{5}p_n + \frac{252}{20} - \frac{180}{20} = -\frac{56}{5}p_n - \frac{72}{20} = -\frac{56}{5}p_n - \frac{18}{5} = -\frac{2}{5}(28p_n - 9) = -\frac{2}{5}U_n$
   La suite (U_n) est donc géométrique de raison $-\frac{2}{5}$
   b. On déduit de ce qui précède que $U_n = (-\frac{2}{5})^{n-1}xU_1$.
   Or $U_1 = 28p_1 - 9 = 28x\frac{1}{8} - 9 = -\frac{11}{2}$ donc $U_n = -\frac{11}{2}(-\frac{2}{5})^{n-1}$
   Par suite, puisque $U_n = 28p_n - 9$, on a $p_n = \frac{U_n+9}{28}$ et enfin $p_n = \frac{-\frac{11}{2}(-\frac{2}{5})^{n-1}+9}{28} = -\frac{11}{56}(-\frac{2}{5})^{n-1} + \frac{9}{28}$
   c. $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty}(-\frac{11}{56}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{28}) = \frac{9}{28}$ car $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$