

M5 : Calculer la limite d'une fonction contenant une exponentielle

Objectif : Savoir utiliser les croissances comparées

Règle fondamentale des croissances comparées :

En l'infini (et seulement en l'infini), e^x l'emporte sur toute puissance de x , et les puissances de x l'emportent sur $\ln(x)$. On pourrait la résumer ainsi :

En l'infini, on a $e^x > x^n > \ln(x)$

1. Décomposez la fonction dont on cherche la limite en somme, différence, produit ou quotient de fonctions usuelles.
2. Utiliser les propriétés des opérations sur les limites.
3. Calculez la limite de la fonction de départ :
 - Si le résultat n'est pas une forme indéterminée : conclure
 - Si le résultat est une forme indéterminée, il faut **lever l'indétermination** avant de pouvoir conclure.

Comment lever l'indétermination d'une fonction contenant $\ln(x)$

Méthode 1 : On va se ramener à l'une des limites donnée en cours

1. Factorisez la fonction par le terme qui l'emporte (reportez vous à la règle des croissances comparées)
Remarque : si votre fonction est un quotient, factorisez le numérateur ET le dénominateur par le terme qui l'emporte
2. Utilisez les formules de cours suivantes afin de lever l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \ln x = +\infty$$

Méthode 2 : utiliser les croissances comparées

1. Factorisez la fonction par le terme qui l'emporte (reportez vous à la règle des croissances comparées)
Remarque : si votre fonction est un quotient, factorisez le numérateur ET le dénominateur par le terme qui l'emporte
2. Vous avez fait apparaître des fonctions quotient dans votre parenthèse : déterminez pour chacune lequel du numérateur ou du dénominateur est le terme le plus fort
 - S'il s'agit du numérateur, la limite est $+\infty$
 - S'il s'agit du dénominateur, la limite est 0

ExempleCalculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$ **Méthode 1**

On se trouve dans une indétermination du type “ $+\infty - \infty$ ”

Mais puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 - \frac{\ln x}{x})$

Et que d’après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Méthode 2

On se trouve dans une indétermination du type “ $+\infty - \infty$ ”

Mais puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 - \frac{\ln x}{x})$

Et que d’après la règle des croissances comparées x l’emporte en l’infini sur $\ln(x)$, on peut écrire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Remarque : on a tout simplement conservé le terme qui l’emporte et remplacé le plus faible par 1. (vous pouvez vérifiez que cette technique fonctionne sur les limites du cours)