M5 : Etudier la nature d'une configuration géométrique

Objectif : S'aider des propriétés des complexes afin de résoudre des problèmes géométriques

Distance entre deux points A et B :

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$$

Angle orienté : Soit A, B, C et D quatre points.

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Nature d'un polygone :

- **TRIANGLE** : Soit ABC un triangle.
  - Si ABC a deux côtés égaux alors ABC est un triangle isocèle.
  - Si ABC a trois côtés égaux alors ABC est un triangle équilatéral.
  - Si ABC a un angle droit, alors ABC est un triangle rectangle.
  - Si ABC a deux côtés égaux et un angle droit, alors ABC est un triangle isocèle rectangle.

- **QUADRILATERE** : Soit $ABCD$ un quadrilatère.
  - Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.
  - Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $AB = CD$ ou $AD = BC$ alors $ABCD$ est un losange.
  - Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $AB = CD$ ou $AD = BC$ et $ABCD$ a un angle droit alors $ABCD$ est un carré.
  - Si $AB = CD$ et $AD = BC$ et $ABCD$ a un angle droit alors $ABCD$ est un rectangle.

Points alignés : Soit A, B et C trois points. A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire ssi

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

Barycentre : Soit A et B deux points. Le barycentre G des deux points pondérés (A, α) et (B, β) a pour affixe

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

Rappel : G est le barycentre du triangle ABC ssi $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ ssi

$$\begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

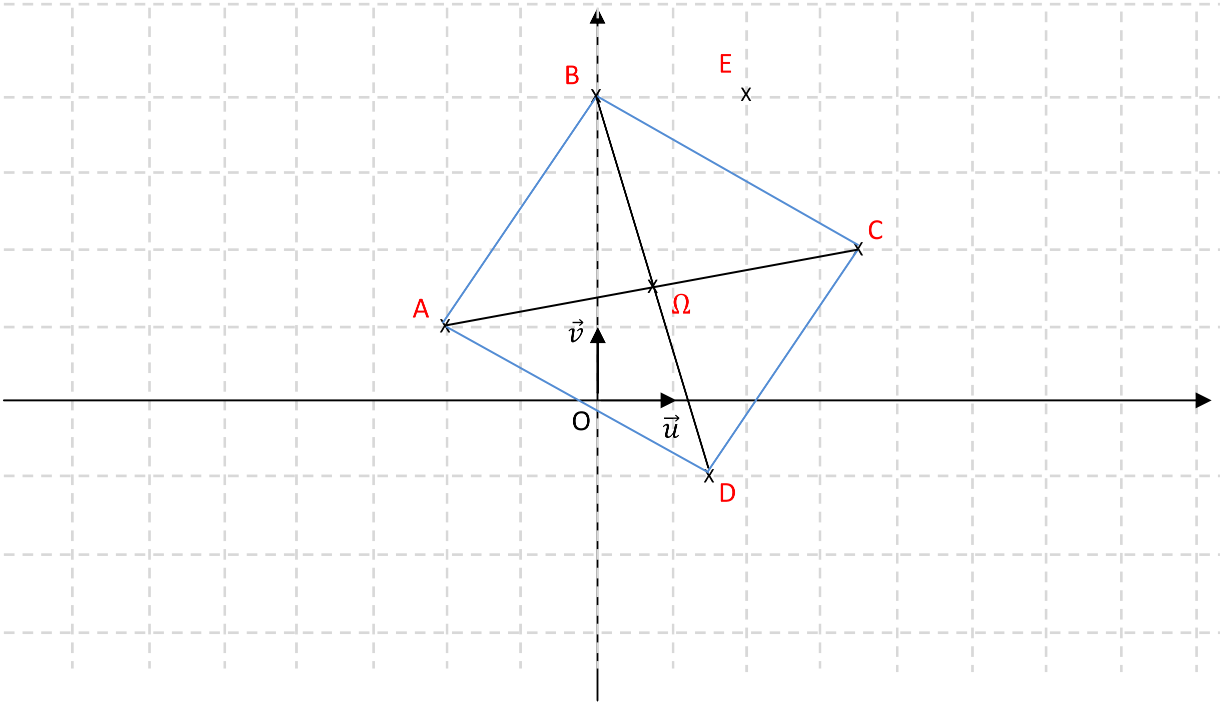
Exemple

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, placez les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = -2 + i \qquad z_B = 4i \qquad z_C = \frac{7}{2} + 2i \qquad z_D = \frac{3}{2} - i$

2. Déterminez, en justifiant, la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. Déterminez l'affixe du point Ω centre du quadrilatère $ABCD$.
4. Placez le point E d'affixe $2 + 4i$: O, E et Ω sont-ils alignés ?
5. Le triangle ABC est-il rectangle ?

1. $z_A = -2 + i \qquad z_B = 4i \qquad z_C = \dfrac{7}{2} + 2i \qquad z_D = \dfrac{3}{2} - i$



2. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $ABCD$ est un parallèlogramme.

$$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\big(4i - (-2 + i)\big) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(2 + 3i)$$

$$\overrightarrow{DC}(z_C - z_D) \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\left(\frac{7}{2} + 2i - \left(\frac{3}{2} - i\right)\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(2 + 3i)$$

Donc $ABCD$ est un parallèlogramme.

3. Le point Ω est le centre du quadrilatère $ABCD$ donc, c'est le milieu de $[BD]$ et de $[AC]$ puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc :

$$z_\Omega = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{4i + \frac{3}{2} - i}{2} = \frac{\frac{3}{2} + 3i}{2} = \frac{3 + 6i}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}i$$

4. O, E et Ω sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{OE}(z_E) \Leftrightarrow \overrightarrow{OE}(2+4i\,)$$
$$\overrightarrow{O\Omega}(z_\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Omega}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}i \qquad \times\frac{3}{8}$$

Donc il existe $k=\frac{3}{8}$ tel que $\overrightarrow{O\Omega}=k\overrightarrow{OE}$ donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ sont colinéaires et on en conclut que :

O, E et Ω sont alignés

5. $AB^2=|z_B-z_A|^2=|4i-(-2+i)|^2=|2+3i|^2=\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^2=4+9=13$

$$BC^2=|z_C-z_B|^2=\left|\frac{7}{2}+2i-4i\right|^2=\left|\frac{7}{2}-2i\right|^2=\left(\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+(-2)^2}\right)^2=\frac{49}{4}+4=\frac{65}{4}$$

$$AC^2=|z_C-z_A|^2=\left|\frac{7}{2}+2i-(-2+i)\right|^2=\left|\frac{11}{2}+i\right|^2=\left(\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+1^2}\right)^2=\frac{121}{4}+1$$
$$=\frac{125}{4}$$

On a :

$$AB^2+BC^2=13+\frac{65}{4}=\frac{52+65}{4}=\frac{117}{4} \qquad \text{et} \quad AC^2=\frac{125}{4}$$

Comme $AB^2+BC^2\neq AC^2$, on peut conclure que le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

D'après la figure, il ne l'est pas en C et pas en A.

Donc,

ABC n'est pas un triangle rectangle