<u>Problème 1</u> :

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

. G_n : 'Pierre gagne la $n$ième partie'

. P_n : 'Pierre perd la $n$ième partie'

On pose $p_n = P(G_n)$ et $q_n = P(P_n)$

1. Recherche d'une relation de récurrence
   a. Déterminer p_1, puis les probabilités conditionnelles $P_{G_1}(G_2)$ et $P_{P_1}(G_2)$
   b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$
2. Etude de la suite (p_n)
   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$
   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n
   b. En déduire l'expression p_n de en fonction de n
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$

<u>Problème 2</u> :

On lance un dé tétraédrique dont les 4 faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres $p_{1,}p_{2,}p_3$ et p_4 , dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 \ = 0{,}4$, démontrer que :
   $$p_1 = 0{,}1\ ;\ p_2 \ = 0{,}2\ ;\ p_3 \ = 0{,}3$$
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants.
   On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   a. Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n$ième lancer.
   a. Monter que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S_{n_0} > 0{,}999$

<u>Problème 3</u> :

1. Une urne contient quatre jetons numérotées 1 à 4.
   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton, puis on remet le jeton dans l'urne.
   On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
   Soit $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et de coordonnées respectives $(a\,;\, -5\,; 1-a)$ et $(1+b\,; 1\,; b)$.
   Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\frac{1}{4}$.
2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.
   Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
   Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.
   Pour tout entier n, on désigne par :
   .A_n l'évènement : 'A gagne la $n$ième partie'
   .B_n l'évènement : 'B gagne la $n$ième partie'
   .C_n l'évènement : 'Le jeu continue après la $n$ième partie'
   a. Calculer les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$.
   b. Exprimer $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$ et montrer que :
   $$P(C_n) = (\frac{5}{8})^n$$
   Exprimer $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$ et montrer que :
   $$P(A_n) = \frac{3}{16}(\frac{5}{8})^{n-1}$$
3.
   a. Déterminer la limite de $P(A_n)$ quand n tend vers +∞
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Problème 4 :

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'évènement : 'Amélie est arrêtée par le $n$ième feu rouge ou orange' et $\overline{E_n}$ l'évènement contraire.

Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- La probabilité que le $(n+1)$ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n$ième feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- La probabilité que le $(n+1)$ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n$ième feu est vert, vaut $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.
   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

   b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux premiers feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. On se place maintenant dans le cas général.
   a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
   b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E_n})$, montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} q_n$$
   c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit la suite (U_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $U_n = 28p_n - 9$
   a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.
   b. Exprimer U_n, puis p_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.