M5 : Calculer la limite d'une fonction contenant une exponentielle

Objectif : Savoir utiliser les croissances comparées

Règle fondamentale des croissances comparées :

En l'infini (et seulement en l'infini), e^x l'emporte sur toute puissance de x, et les puissances de x l'emportent sur $\ln(x)$. On pourrait la résumer ainsi :

En l'infini, on a $e^x > x^n > \ln(x)$

1. Décomposez la fonction dont on cherche la limite en somme, différence, produit ou quotient de fonctions usuelles.
2. Utiliser les propriétés des opérations sur les limites.
3. Calculez la limite de la fonction de départ :
   - Si le résultat n'est pas une forme indéterminée : conclure
   - Si le résultat est une forme indéterminée, il faut lever l'indétermination avant de pouvoir conclure.

Comment lever l'indétermination d'une fonction contenant e^x

Méthode 1 : On va se ramener à l'une des limites donnée en cours

1. Factorisez la fonction par le terme qui l'emporte (reportez vous à la règle des croissances comparées)

Remarque : si votre fonction est un quotient, factorisez le numérateur ET le dénominateur par le terme qui l'emporte

2. Utilisez les formules de cours suivantes afin de lever l'indétermination :
   $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Méthode 2 : utiliser les croissances comparées

1. Factorisez la fonction par le terme qui l'emporte (reportez vous à la règle des croissances comparées

Remarque : si votre fonction est un quotient, factorisez le numérateur ET le dénominateur par le terme qui l'emporte

2. Vous avez fait apparaître des fonctions quotient dans votre parenthèse : déterminez pour chacune lequel du numérateur ou du dénominateur est le terme le plus fort
   - S'il s'agit du numérateur, la limite est $+\infty$
   - S'il s'agit du dénominateur, la limite est 0

Exemple

Calculons $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-x}{e^x+1}$

Dès le numérateur, on se trouve dans une indétermination du type "$+\infty - \infty$" : pas la peine de continuer il faut factoriser par le terme qui l'emporte, ici e^x.

Mais puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-x}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(e^x-\frac{x}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

Et que d'après le cours $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

Et par suite $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$