M5 Polynômes de degré supérieur ou égal à 3 : méthode d'identification

Objectif : Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 3

Considérons le polynôme $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

1. Trouvez une racine ''évidente'' du polynôme.
   Remarques :
   - *En notant cette racine x_1, on doit donc avoir $P(x_1) = 0$*
   - *La plupart du temps cette racine vous sera donnée dans l'exercice et l'on vous demandera simplement de vérifier que $P(x_1) = 0$*
2. On aura nécessairement la factorisation suivante :
   $$P(x) = (x - x_1)(ax^2 + bx + c)$$
3. Développez $P(x)$:
   $$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax_1x^2 - bx_1x - cx_1$$
4. Ordonnez les coefficients de x^3, x^2, x de la façon suivante :
   $$P(x) = ax^3 + (b - ax_1)x^2 + (c - bx_1)x - cx_1$$
5. Méthode d'identification : posez le système suivant :
   $$\begin{cases} a = A \\ b - ax_1 = B \\ c - bx_1 = C \\ -cx_1 = D \end{cases}$$

Remarque : Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux deux à deux

6. Résolvez le système pour trouver les valeurs de a, b et c.
7. Factorisez (si c'est possible) $ax^2 + bx + c$: vous obtenez la forme factorisée de votre polynôme du troisième degré.

Remarque : cette méthode est valable pour tout polynôme de degré supérieur ou égal à 3. Par exemple, pour un degré 4 : vous devrez trouver une racine évidente de ce polynôme, appliquer la méthode d'identification, puis une racine évidente au degré 3 ainsi obtenu… et ainsi de suite jusqu'à factorisation complète. La règle générale est que si un polynôme P admet une racine évidente a, alors le polynôme est divisible par $(x - a)$

Exemple

On donne le polynôme $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

Calculez $P(1)$ puis déduisez en une factorisation du polynôme P

1. $P(1) = 1^3 - 7 \times 1 + 6 = 0$ donc 1 est une racine du polynôme P
2. On pose $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
3. En développant on a alors $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
4. En ordonnant comme indiqué on trouve

$$P(x) = x^3 + (b-a)x^2 + x(c-b) - c$$

5. Le système est alors :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = -7 \\ -c = 6 \end{cases}$$

6. Sa résolution donne $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$
7. Ne reste plus qu'à factoriser le polynôme $x^2 - x - 6$ (méthode M4)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1} = \dfrac{1-5}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1} = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Donc la forme factorisée du polynôme est

$$a(x-x_1)(x-x_2) = \big(x-(-2)\big)(x-3) = (x+2)(x-3)$$

Ainsi la forme factorisée du polynôme P est $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$