M4 : Calculer une fonction dérivée

Objectif : Déterminer l'expression d'une fonction dérivée

1. Identifiez la formule adéquate (somme, produit, quotient...) dans le tableau rappelé ci-dessous
2. Identifiez u et le cas échéant v
3. Dérivez séparément u et v
4. Appliquez la formule

Tableau des dérivées usuelles :

$k' = 0$ $\quad$ $(ku)' = k \times u'$

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad$ $(uv)' = u' \times v + u \times v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

Remarques :

- *Plusieurs formules pourront être utilisées dans le calcul d'une même dérivée : voir exemple* 3
- *Prenez dès maintenant l'habitude de laisser vos résultats factorisés au maximum (c'est-à-dire ne développez pas systématiquement vos dérivées) : vous comprendrez pourquoi dans le chapitre des études de fonctions.*

Exemple 1

Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = 2x(x-3)$

1. La fonction f est de la forme $u \times v$, dont la dérivée est de la forme $u'v + uv'$
2. $u(x) = 2x$ et $v(x) = x - 3$
3. u est de la forme $k \times u$, ainsi $u'(x) = 2$ et v est de la forme $u + v$, ainsi $v'(x) = 1$
4. $f'(x) = u' \times v + u \times v' = 2 \times (x-3) + 2x \times 1 = 2(x-3) + 2x$
   Après développement, $f'(x) = 2x - 6 + 2x = 4x - 6$

Remarque : On aurait tout aussi bien pu développer $f(x)$ puis appliquer une autre formule, ici $(u+v)'$, que celle que nous venons d'utiliser.

Exemple 2

Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{2x-5}{3-4x}$

1. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$, dont la dérivée est de la forme $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
2. $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = 3 - 4x$
3. u et v sont de la forme $u + v$, ainsi $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -4$
4. La dérivée de f est ainsi :

$$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} = \frac{2 \times (3-4x) - (2x-5) \times (-4)}{(3-4x)^2}$$

Après développement,

$$f'(x) = \frac{6 - 8x + 8x - 20}{(3-4x)^2} = \frac{-14}{(3-4x)^2}$$

Exemple 3

Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = (\frac{2x-5}{3-4x})^2$

1. La fonction f est de la forme u^n
2. $u(x) = \frac{2x-5}{3-4x}$
3. u est de la forme $\frac{v}{w}$, ainsi $u'(x) = \frac{-14}{(3-4x)^2}$ (voir exemple 2 pour le détail du calcul)
4. La dérivée de f est ainsi

$$f'(x) = n \times u' \times u^{n-1} = 2 \times \frac{-14}{(3-4x)^2} \times \frac{2x-5}{3-4x} = \frac{-28(2x-5)}{(3-4x)^3}$$