M4 : Résoudre une équation complexe dans $\mathbb{C}$

Objectif : Savoir appréhender tout type d'équation complexe

Vous seront proposés différents types d'équations :

Equation du premier degré complexe ne contenant que du z

Le principe est strictement identique que celui que vous appris avec du x

1. Placez tous les termes contenant du z d'un côté de l'équation : les termes n'en contenant pas iront de l'autre côté.
2. Factorisez par z si nécessaire

Remarque : il ne doit vous rester qu'un seul z dans l'équation

3. Isolez z.
4. Si cela est demandé, écrivez z sous sa forme algébrique.

Equation du premier degré complexe ne contenant que du $\bar{z}$

1. Résolvez l'équation de la même manière que si elle avait contenu du z : vous obtenez une solution $\bar{z}$
2. Calculez le conjugué de la valeur trouvée de $\bar{z}$: il s'agit de la solution z recherché.

Equation du premier degré complexe contenant du z et du $\bar{z}$

1. Posez $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$ et remplacez dans l'équation.
2. Placez d'un côté de l'équation tout ce qui dépend de a ou de b et le reste de l'autre.
3. Mettez les deux côtés de l'équation sous leur forme algébrique (partie réelle + i $\times$partie imaginaire) : l'équation doit avoir la forme $X + iY = X' + iY'$
4. Résolvez le système $\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$ et déterminez les valeurs de a et b.
5. La solution est $z = a + ib$

Equation du second degré complexe

1. Placez TOUS les termes d'un seul côté de l'équation : vous faites apparaître un polynôme du second degré complexe $az^2 + bz + c$
2. Calculez le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
3. Si $\Delta > 0$ deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   Si $\Delta = 0$ une solution réelle $x_1 = \frac{-b}{2a}$

   Si $\Delta < 0$ deux solutions complexes $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
4. Concluez à l'aide d'un ensemble de solutions $S = \{\dots\}$

Exemples

Exemple 1 : Ne contenant que du z

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $-5z - 2iz = iz + 1$.

Présentez sa solution z sous forme algébrique

1. $-5z - 2iz - iz = 1$
2. $z(-5 - 2i - i) = 1 \Leftrightarrow z(-5 - 3i) = 1$
3. $z = \frac{1}{-5-3i} = \frac{1}{-5-3i} \times \frac{-5+3i}{-5+3i} = \frac{-5+3i}{25+9} = \frac{-5+3i}{34}$
4. $S = \{\frac{-5+3i}{34}\}$

Exemple 2 : Ne contenant que du $\bar{z}$:

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z} = -i\bar{z} + 2$

1. $\bar{z} + i\bar{z} = 2 \Leftrightarrow \bar{z}(1 + i) = 2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{2}{1+i} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$
2. $z = \bar{\bar{z}} = \overline{1 - i}$ donc $S = \{1 + i\}$

Exemple 3 : Contenant du z et du $\bar{z}$:

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $i\bar{z} + 7 = 2z + 2i$

1. $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$ d'où

$$i\bar{z} + 7 = 2z + 2i \Leftrightarrow i(a - ib) + 7 = 2(a + ib) + 2i$$
$$\Leftrightarrow ia + b + 7 = 2a + 2ib + 2i$$

2. $ia + b - 2a - 2ib = -7 + 2i$
3. $(-2a + b) + i(a - 2b) = -7 + 2i$
4. $\begin{cases} -2a + b = -7 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -7 \\ 2a - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = -3 \\ 2a - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases}$
5. $S = \{4 + i\}$

Exemple 4 : équation du second degré complexe

Résolvez l'équation $2z^2 + z = -3$

1. $2z^2 + z = -3 \Leftrightarrow 2z^2 + z + 3 = 0$
2. On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$
3. $\Delta < 0$ donc

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{23}}{4} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{23}}{4}$$

4. Donc

$$S = \left\{\frac{-1 - i\sqrt{23}}{4} ; \frac{-1 + i\sqrt{23}}{4}\right\}$$