

M4 Calculer un discriminant et des racines résoudre une inéquation du second degré

Objectif : Résoudre une inéquation contenant du carré

Factoriser un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

1. Résolvez l'équation $P(x) = 0$ (voir méthode 3)
2. Trois cas se présentent :
 - Si $\Delta > 0$ la forme factorisée de P est :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
 - Si $\Delta = 0$ la forme factorisée de P est :

$$P(x) = a(x - x_1)^2$$
 - Si $\Delta < 0$ aucune factorisation n'est possible

Résoudre une inéquation

1. Placez TOUS les termes d'un seul côté de l'équation de manière à obtenir une expression du type $ax^2 + bx + c = 0$

Méthode 1

2. Factorisez le polynôme $ax^2 + bx + c$ ainsi obtenu (voir ci-haut)
3. Dressez le tableau de signes du polynôme factorisé
Rappel : une seule ligne par facteur !
4. Concluez à l'aide d'un intervalle solution

Méthode 2

2. Résolvez l'équation $P(x) = 0$
3. Identifiez le signe de a et le signe de Δ puis remplissez le tableau de signes suivant la logique du rappel ci-dessous
4. Concluez à l'aide d'un intervalle solution

Rappel : signe d'un polynôme

- Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	\emptyset	signe de $-a$	signe de a

- Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	\emptyset	signe de a

▪ Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

Exemple

Résolvez l'inéquation $2x^2 > 6x + 8$

Méthode 1 :

1. $2x^2 > 6x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 > 0$

2. Factorisation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 36 + 64 = 100$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 2} = \frac{6 - 10}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 2} = \frac{6 + 10}{4} = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Donc la forme factorisée du polynôme est

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - (-1))(x - 4) = 2(x + 1)(x - 4)$$

3. Tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$2(x + 1)$	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	0	+
$2x^2 - 6x - 8$	+	0	-	+

4. L'ensemble solution est ainsi

$$]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$$

Méthode 2 :

1. $2x^2 > 6x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 > 0$

2. Résolution de l'équation " $= 0$ " :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 36 + 64 = 100$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 2} = \frac{6 - 10}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 2} = \frac{6 + 10}{4} = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

3. Tableau de signes :

Puisque $a = 2 > 0$ et $\Delta = 100 > 0$ on a :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$2x^2 - 6x - 8$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. L'ensemble solution est ainsi

$$]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$$