M3 : Comparer et encadrer avec la fonction carré

But : Savoir utiliser les propriétés de la fonction carré pour déterminer des encadrements et pour comparer des réels.

Comparer a et b dans le cas où $a < b$

- Si a ET b appartiennent à l'intervalle $[0; +\infty[$, alors $a^2 < b^2$
- Si a ET b appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0]$ alors $a^2 > b^2$
- Si a ET b n'appartiennent pas au même intervalle (généralement $a < 0$ et $b > 0$), il faut couper l'étude en deux parties distinctes.

Exemple

Comparer les carrés de a et b avec :

$a = \sqrt{3}$ et $b = 3$	$a = \sqrt{12}$ et $b = 3$	$a = -\sqrt{2}$ et $b = -1{,}5$
comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on ne change pas le sens de l'inégalité. $\left(\sqrt{3}\right)^2 < 2^2$	comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on ne change pas le sens de l'inégalité. $(3)^2 < \sqrt{12}^2$	comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, on change le sens de l'inégalité. $\left(-\sqrt{2}\right)^2 > (-1{,}5)^2$

Encadrer x^2 dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$

- Si a ET b appartiennent à l'intervalle $[0; +\infty[$, alors $a^2 < x^2 < b^2$
- Si a ET b appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0]$ alors $a^2 > x^2 > b^2$
- Si a ET b n'appartiennent pas au même intervalle (généralement $a < 0$ et $b > 0$), il faut couper l'étude en deux parties distinctes.

Exemple

Encadrer x^2 sachant que :

$x \in [2; 2{,}5]$	$x \in]-1; -0{,}5[$	$0 \leq x \leq 5$
comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on ne change pas le sens de l'inégalité. $2^2 \leq x^2 \leq 2{,}5^2$	comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, on change le sens de l'inégalité. $(-0{,}5)^2 < x^2 < (1)^2$	comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on ne change pas le sens de l'inégalité. $0 \leq x^2 \leq 5^2$