M3 : Montrer qu'une courbe admet un axe ou un centre de symétrie

Objectif : Identifier les symétries d'une courbe

Axe de symétrie

1. Identifiez la valeur de a correspondant à l'équation $x = a$ de l'axe vertical
2. Calculez $f(a + h)$
3. Calculez $f(a - h)$
4. Comparez : si les deux valeurs sont égales, la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe de la fonction f

Exemple 1 : axe de symétrie

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\,; 4\}$ par $f(x) = \frac{4}{x(x-4)}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Montrons que la droite Δ d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$

1. $a = 2$
2. $f(2 + h) = \dfrac{4}{(2+h)(2+h-4)} = \dfrac{4}{4+2h-8+2h+h^2-4h} = \dfrac{4}{h^2-4}$
3. $f(2 - h) = \dfrac{4}{(2-h)(2-h-4)} = \dfrac{4}{4-2h-8-2h+h^2+4h} = \dfrac{4}{h^2-4}$
4. $f(2 - h) = f(2 + h)$ donc l'axe $x = 2$ est bien un axe de symétrie pour $\mathcal{C}$

Centre de symétrie

1. Identifiez la valeur de a correspondant à l'abscisse du point testé
2. Calculez $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}$
3. Identifiez b correspondant à l'ordonnée du point testé
4. Comparez : si les deux valeurs sont égales, le point de coordonnées $(a\,; b)$ est centre de symétrie de la courbe de la fonction f

Exemple 2 : centre de symétrie

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Montrons que le point de coordonnées (2 ; 1) est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$

1. $a = 2$
2. $\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = \frac{\frac{(2+h)-4}{(2+h)-2}+\frac{(2-h)-4}{(2-h)-2}}{2} = \frac{\frac{-2+h}{h}+\frac{-2-h}{-h}}{2} = \frac{\frac{-2+h+2+h}{h}}{2} = \frac{\frac{2h}{h}}{2} = 1$
3. $b = 1$
4. $\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = 1$ donc le point de coordonnées (2 ; 1) est bien un centre de symétrie de $\mathcal{C}$