M3 : Etudier la dérivabilité en un point et sur un ensemble

Objectif : Déterminer si une fonction peut être dérivée ou non

Dérivabilité en un point :

Il s'agit de vérifier que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie

1. Calculez la limite (reportez vous à la fiche $M2$)
2. La limite est elle finie ?
   - Si oui la fonction est dérivable en a et cette limite est $f'(a)$
   - Si non la fonction n'est pas dérivable en a

Remarque : une valeur est dite finie dès le moment où elle n'est pas infinie : $2, -5, \frac{1}{3}$ *ou* $\sqrt{8}$ *sont par exemple des valeurs finies.*

Dérivabilité sur un ensemble :

1. Décomposez la fonction étudiée en une somme, différence, produit, quotient ou composée de fonctions usuelles.
2. Si cela est possible, les fonctions usuelles étant par nature dérivables sur leur ensemble de définition (sauf exceptions : voir cours) la fonction de départ sera elle-même dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple 1 : dérivabilité en un point

La fonction $f(x) = 3x^2 - 2x$ est elle dérivable en 1 ?

1. Calculons la limite

$$
\begin{aligned}
f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 2(1+h) - (3 \times 1^2 - 2 \times 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+2h+h^2) - (2+2h) - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 2 - 2h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 4h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+4)}{h} = \lim_{h \to 0} 3h + 4 = 4
\end{aligned}
$$

2. Puisque la limite est finie, alors la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$

Exemple 2 : dérivabilité sur un ensemble

La fonction $f(x) = 3x^2 - 2x$ est elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

La fonction $3x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles (3 et x^2)

La fonction $2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles (2 et x)

Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($3x^2$ et $2x$)