M3 : Etudier la convergence d'une suite

Objectif : Etudier le comportement asymptotique d'une suite en $+\infty$

Comment étudier la convergence d'une suite arithmétique ?

1. Calculez la raison r de la suite
2. Concluez :
   - Si $r > 0$ alors la suite diverge.
     $$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$
   - Si $r < 0$ alors la suite diverge.
     $$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$
   - Si $r = 0$ alors la suite converge.
     $$\lim_{n\to+\infty} U_n = u_0$$

Exemple

On considère la suite de premier terme $u_0 = 1$ et de terme général $u_{n+1} = 2 + u_n$

Etudiez la convergence de la suite (u_n)

1. $r = 2$
2. $r > 0$ donc la suite (u_n) est divergente : sa limite est $+\infty$

Comment étudier la convergence d'une suite géométrique ?

3. Calculez la raison q de la suite
4. Concluez :
   - Si $-1 < q < 1$ alors la suite converge et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
   - Si $q = 1$ alors la suite est constante et égale à u_0.
   - Si $q > 1$ alors la suite diverge
     De plus, si $U_0 > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
     Si $U_0 < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
   - Si $q \leq -1$ alors la suite n'admet pas de limite.

Exemple

On considère la suite de premier terme $u_0 = 6$ et de terme général $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$

Etudiez la convergence de la suite (u_n)

3. $q = \frac{1}{3}$
4. Comme $-1 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Cas général : convergence de suites explicites :

1. Déterminez la fonction f telle que l'on ait $u_n = f(n)$
2. Calculez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
3. Concluez : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$: la suite est convergente si sa limite est un nombre réel.

Astuce : vous pouvez sauter tout ou partie de ces étapes si la suite contient q^n. Dans ce cas précis, utilisez le résultat du cours :

- Si $q > 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

Exemple : suite explicite

Etudiez la convergence des suites :

$$u_n = n^2 - 4n + 3$$

$$v_n = (\frac{1}{3})^n - 2^n$$

Suite (u_n) :

1. $u_n = f(n)$ si $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
3. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: la suite (u_n) n'est donc pas convergente.

Suite (v_n) : utilisation de l'astuce

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ car $1 < \frac{1}{3} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et donc la suite (V_n) n'est pas convergente

Suites définies par récurrence :

1. Montrez que la suite est majorée ou minorée (c'est-à-dire trouvez le réel a tel que l'on ait $u_n < a$ ou $u_n > a$) : en première ce nombre sera donné.
2. Etudiez les variations de la suite (u_n)
3. Concluez :
   - Si la suite est minorée et décroissante, elle est convergente
   - Si la suite est majorée et croissante, elle est convergente
   - Sinon, elle est divergente

Remarque : *cette méthode ne vous donne pas la limite de la suite ! Par exemple, si vous montrez que* $u_n < 3$ *et* (u_n) *strictement croissante, la suite est bien convergente mais rien n'empêche que sa limite soit* 0*, ou* 1*, ou* -10*…*

Déterminer la limite d'une suite définie par récurrence :

1. Montrez que la suite est convergente
2. Posez $l = u_n = u_{n+1}$
3. Remplacez u_n et u_{n+1} par l dans l'expression de la suite donnée en énoncé
4. Résolvez l'équation : la valeur de l est la limite de la suite (u_n)

Remarque : étape 2 : à partir du moment ou l'on sait qu'une suite est convergente, on sait qu'à partir d'un certain rang n, son comportement sera de type asymptotique, donc les valeurs de u_n *et de* u_{n+1} *seront infiniment proches, donc presque égales.*

Exemple : suite définie par récurrence

Sachant que $0 < u_n < 4$, étudiez la convergence de la suite

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$$

Déterminez sa limite.

Convergence :

1. $0 < u_n < 4$ par hypothèse
2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - u_n)(\sqrt{2u_n+8} - u_n)}{\sqrt{2u_n+8} + u_n}$ (méthode du conjugué : pensez à l'utiliser dès qu'une racine vous pose problème)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 8 - {u_n}^2}{\sqrt{2u_n+8} - u_n} = \frac{-(u_n - 4)(u_n + 2)}{\sqrt{2u_n+8} - u_n}$$

Puisque $0 < u_n < 4$, $u_n - 4 < 0$ et $u_n + 2 > 0$ et $\sqrt{2u_n+8} + u_n > 0$
Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante

3. La suite est majorée par 4 et croissante : elle est donc convergente

Limite :

1. la suite (u_n) est bien convergente
2. On pose $l = u_n = u_{n+1}$
3. $l = \sqrt{2l+8} \Leftrightarrow l^2 = 2l + 8 \Leftrightarrow l^2 - 2l - 8 = 0 \Leftrightarrow (l+2)(l-4) = 0$
   Donc $l = -2$ ou $l = 4$. Comme $0 < u_n < 4$, la limite ne peut pas être -2
   Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$