

M3 : Résoudre une inéquation contenant une exponentielle

Objectif : Déterminer le signe d'une fonction contenant une exponentielle

1. Isolez l'exponentielle dans l'inéquation
2. Transformez l'autre membre en une exponentielle à l'aide de la propriété
 $a = e^{\ln a}$
3. Éliminez les exponentielles
4. Résolvez la nouvelle inéquation obtenue et concluez à l'aide d'un intervalle solution

Remarque : à l'étape 3, pour supprimer les exponentielles, on applique la fonction logarithme, strictement croissante : le sens de l'inéquation ne change donc pas !

Exemple

Résolvez $2e^{3x} - 5 \leq 0$

Déduisez en le signe de la fonction $f(x) = 2e^{3x} - 5$ sur \mathbb{R}

1. $2e^{3x} \leq 5 \Leftrightarrow e^{3x} \leq \frac{5}{2}$
2. $e^{3x} \leq e^{\ln \frac{5}{2}}$
3. $3x \leq \ln \frac{5}{2}$
4. $x \leq \ln \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$ donc $S =] - \infty, \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}]$

On en déduit directement que :

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ sur l'intervalle }] - \infty, \frac{5}{6} [\\ f(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{5}{6} \\ f(x) > 0 \text{ sur l'intervalle }] \frac{5}{6}, +\infty [\end{cases}$$