M3 : Déterminer l'équation d'une asymptote

Objectif : Trouver une droite qui permettra d'assimiler la courbe au-delà d'un certain rang

Il s'agit de tester séparément chacun des cas suivants :

Asymptote horizontale

1. La fonction admet elle une limite finie en $+\infty$?
    - Si oui sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = \lim_{x\to+\infty} f(x)$
    - Si non elle n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$, mais peut y admettre une asymptote oblique
2. La fonction admet elle une limite finie en $-\infty$?
    - Si oui sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = \lim_{x\to-\infty} f(x)$
    - Si non elle n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$, mais peut y admettre une asymptote oblique

Remarque : les asymptotes en $+$ et $-\infty$ peuvent être confondues et n'en former qu'une.

Asymptote verticale

La fonction admet elle une ou plusieurs valeurs interdites ?

- Si oui sa courbe admet autant d'asymptotes verticales que de valeurs interdites, d'équation(s) $x =$ valeur interdite
- Si non elle n'admet aucune asymptote verticale

Asymptote oblique

<u>Vérifier qu'une droite d'équation $y = ax + b$ donnée est asymptote oblique</u>

1. Calculez la différence $f(x) - y$
2. Calculez $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y)$
    - Si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$ alors la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$
    - Sinon elle n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$, mais peut y admettre une asymptote horizontale
3. Calculez $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y)$
    - Si $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = 0$ alors la courbe de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ d'équation $y = ax + b$
    - Sinon elle n'admet pas d'asymptote oblique en $-\infty$, mais peut y admettre une asymptote horizontale

<u>Déterminer l'équation d'une asymptote oblique</u> (ne convient que pour une

fonction quotient)

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{dénominateur}$: voir méthode d'identification
2. L'équation de l'asymptote est $y = ax + b$

Exemple 1 : asymptotes verticales et horizontales

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ et C_f sa courbe représentative.

Calculez successivement $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Déduisez en l'existence d'une asymptote à la courbe C_f et donner son équation.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

On en déduit ainsi que la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à C_f.

Remarque : *Cette asymptote est la même en $+\infty$ et en $-\infty$, elle est donc l'unique asymptote horizontale de C_f.*

Calculez successivement $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$. Déduisez en l'existence d'une asymptote à la courbe C_f et donner son équation.

- Si $x > 2$ et proche de 2, alors $x^2 > 4$ et donc $x^2 - 4 > 0$

De la même manière, si $x > 2$ et proche de 2, alors $x^2 > 4$ et donc $x^2 - 1 > 3 > 0$

On en déduit qu'aux abords de 2 par valeurs positives, la fonction f est positive. Donc $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$

- Si $x < 2$ et proche de 2, alors $x^2 < 4$ et donc $x^2 - 4 < 0$

De la même manière, si $x < 2$ et proche de 2, alors $x^2 < 4$ et donc $x^2 - 1 < 3$ mais reste positif

On en déduit qu'aux abords de 2 par valeurs négatives, la fonction f est négative. Donc $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$

Par suite, on peut en déduire que la courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$

Calculez successivement $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)$. Déduisez en l'existence d'une asymptote à la courbe C_f et donner son équation.

En suivant le même raisonnement que dans la question 2, on en déduit que la courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$

Exemple 2 : asymptote oblique

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

Montrez que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $ax + b + \frac{c}{x+2}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2 + bx + 2ax + 2b + c}{x+2}$$

Par identification, on en déduit que $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 5 \\ 2b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$

La fonction f peut donc également s'écrire $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x+2}$

Soit la droite d'équation $y = x - 3$. Calculez $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y)$ puis déduisez en l'existence d'une asymptote à la courbe C_f et donner son équation.

$$f(x) - y = x + 3 - \frac{1}{x+2} - (x+3) = -\frac{1}{x+2}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$

On en déduit ainsi que la courbe C_f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x - 3$