M3 : Déterminer les variations d'une suite quelconque

Objectif : Etudier les variations d'une suite qui n'est ni arithmétique, ni géométrique

Variation d'une suite explicite : $u_n = f(n)$

1. Identifiez la fonction f
2. Déterminez le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition (par défaut $[0\,;\,+\infty[$)
3. Conclure : le sens de variation de la suite est le même que celui de la fonction f

Suites définies par récurrence

- **1ère méthode :**

Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

1. Calculez la différence $u_{n+1} - u_n$ et simplifiez la au maximum
2. Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
   - Si $u_{n+1} - u_n > 0$ alors la suite est strictement croissante
   - Si $u_{n+1} - u_n < 0$ alors la suite est strictement décroissante

- **2ème méthode :**

Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

1. Déterminez indépendamment les expressions de u_n et de u_{n+1}
2. Calculez le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et simplifiez le au maximum
3. Deux cas se présentent :
   - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est strictement croissante
   - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite est strictement décroissante

Remarques :

- *Notez bien que ces deux méthodes sont valables pour l'ensemble des suites (vous pouvez tout à fait les utiliser sur des suites arithmétiques ou géométriques).*
- *Le choix entre l'une ou l'autre de ces deux méthodes vous est entièrement laissé. Sachez néanmoins que généralement, il est conseillé d'utiliser la 1ère, plus simple à l'emploi.*

Exemple 1 : suite explicite

On considère la suite $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudiez son sens de variation.

1. La suite étant explicite, on définit $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$
2. On étudie son sens de variation sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ (on remarquera que $u_n = f(n)$)

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

Ainsi $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ donc f est strictement décroissante

3. Et donc (u_n) est également strictement décroissante pour tout $n \geq 0$

Exemple 2 : suite définie par récurrence

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n - \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

De plus on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq -\frac{2}{3}$

Etudiez son sens de variation

1ère méthode :

1. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{3} - U_n = -\frac{1}{2}U_n - \frac{1}{3}$
2. On sait que $U_n \leq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}U_n \geq -\frac{2}{3} \times -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}U_n \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}U_n - \frac{1}{3} \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (U_n) est strictement croissante.

2ème méthode :

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}U_n - \frac{1}{3}}{u_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3u_n}$
2. On sait que $U_n \leq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3U_n \leq -\frac{2}{3} \times 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3u_n} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3u_n} \geq 1$. Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite (U_n) est strictement croissante.