M3 Calculer un discriminant et des racines : résoudre une équation du second degré

Objectif : Résoudre une équation contenant du carré

Résoudre une équation contenant au moins un terme en x^2 : $ax^2+bx+c=0$

1. Placez TOUS les termes d'un seul côté de l'équation de manière à obtenir une expression du type $ax^2+bx+c=0$
2. Calculez le discriminant $\Delta = b^2-4ac$
3.
   - Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$
   - Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution
   $$x_1 = \frac{-b}{2a}$$
   - Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution
4. Concluez par un ensemble de solutions $S=\{\dots.\}$

Résoudre une équation dite "bicarrée" : $ax^4+bx^2+c=0$

1. Placez TOUS les termes d'un seul côté de l'équation de manière à obtenir une expression du type $ax^4+bx^2+c=0$
2. Posez le changement de variable $X=x^2$: votre équation devient alors
   $$aX^2+bX+c=0$$
3. Calculez le discriminant $\Delta = b^2-4ac$
   - Si $\Delta > 0$ l'équation $aX^2+bX+c=0$ admet deux solutions
   $$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$
   - Si $\Delta = 0$ l'équation $aX^2+bX+c=0$admet une solution
   $$X_1 = \frac{-b}{2a}$$
   - Si $\Delta < 0$ l'équation $aX^2+bX+c=0$ n'admet pas de solution
4. <u>Inversez le changement de variable</u>
   - Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^4+bx^2+c=0$ admet les solutions
   $$\begin{cases} x_1 = \sqrt{X_1} \text{ ou } -\sqrt{X_1} \\ x_2 = \sqrt{X_2} \text{ ou } -\sqrt{X_2} \end{cases}$$
   - Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^4+bx^2+c=0$ admet une solution
   $$x_1 = \sqrt{X_1}$$
   - Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^4+bx^2+c=0$ n'admet pas de solution
5. Concluez par un ensemble de solutions $S=\{\dots\}$

Exemple 1

Résolvez l'équation $2x^2 = 6x + 8$

1. $2x^2 = 6x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0$
2. $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 36 + 64 = 100$
3. $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times 2} = \dfrac{6-10}{4} = -\dfrac{4}{4} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times 2} = \dfrac{6+10}{4} = \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$
4. $S = \{-1\,;4\}$

Exemple 2 : équation bicarrée

Résolvez l'équation $x^4 - 7x^2 = 8$

1. $x^4 - 7x^2 = 8 \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 - 8 = 0$
2. On pose $X = x^2$ ce qui donne à résoudre $X^2 - 7X - 8 = 0$
3. $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81$
   $\Delta > 0$ donc l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ admet deux solutions
$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7)-\sqrt{81}}{2\times 1} = \dfrac{7-9}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7)+\sqrt{81}}{2\times 1} = \dfrac{7+9}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \end{cases}$$
4. Inversons le changement de variable :
   $\Delta > 0$ donc l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ admet les solutions
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{-1} \text{ ou } -\sqrt{-1} : \text{impossible !} \\ x_2 = \sqrt{8} \text{ ou } -\sqrt{8} \end{cases}$$
5. $S = \{-\sqrt{8}\,;\,\sqrt{8}\}$