M2 : Calculer l'intégrale d'une fonction

Objectif : Calculer l'aire d'une figure inhabituelle

Déterminer l'intégrale d'une fonction f dont on peut calculer la primitive

1. Calculez la primitive F de f
2. Identifiez les bornes a et b de l'intégrale
3. L'intégrale vaut $F(b) - F(a)$

Déterminer l'intégrale d'une fonction f dont on ne peut pas calculer la primitive (intégration d'un produit $u \times v$)

Il s'agit d'appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)dx = [u(x)v(x))]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

1. Identifiez $u'(x)$ et $v(x)$
   Astuce : choisissez pour $v(x)$ la fonction de type polynôme ($x^2, 3x^4$ …)eexception quand on ne connait pas la primitive de u' par exple xlnx voir test
2. Calculez la primitive $u(x)$ et la dérivée $v'(x)$
3. Appliquez la formule
4. Si il est possible de calculer la primitive de $u(x)v'(x)$ directement, calculez et concluez
   Sinon (double intégration par parties) refaites une intégration par parties et ce jusqu'à ce que vous tombiez sur une primitive calculable

Remarque : on ne vous demandera pas de faire plus qu'une double intégration par parties : si tel est le cas on vous l'indiquera dans l'énoncé

Donner l'interprétation graphique d'une intégrale $\int_a^b f(x)dx$

1. Identifiez la courbe de f et les bornes a et b
2. Concluez à l'aide de cette phrase exacte: la valeur de l'intégrale correspond à l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque : si aucune unité ne vous est donnée dans l'énoncé (m, cm, mm…), l'intégrale sera exprimée par défaut en unités d'aires, notée u.a

Exemple 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2-5}$

Calculez l'intégrale $\int_3^4 f(x)dx$, puis donnez une interprétation graphique du résultat.

Calcul de la primitive de f

1. La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$, dont la primitive est de la forme $\ln u$
2. $u(x) = x^2 - 5$ donc $u'(x) = 2x$: ainsi $\frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2-5}$: il va s'agir d'extraire la formule exacte de l'expression de f
3. $f(x) = 2 \times \frac{x}{x^2-5^2}$
4. $F(x) = 2 \times \ln(x^2 - 5)$

Calcul de l'intégrale de f

1. La primitive est $F(x) = 2 \times \ln(x^2 - 5)$
2. $a = 3$ et $b = 4$
3. $F(4) - F(3) = 2\ln(4^2 - 5) - 2\ln(3^2 - 5) = 2\ln 11 - 2\ln 4 = 2\ln\frac{11}{4} = \ln\frac{121}{16}$

L'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 3$ et $x = 4$ est donc de $\ln\frac{121}{16}$ u.a

Exemple 2 : I.P.P

Calculez à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 xe^x\,dx$$

1. On choisit $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$ (toujours choisir le polynôme pour v)
2. $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$
3. $\int_0^2 xe^x\,dx = [e^x \times x]_0^2 - \int_0^2 e^x \times 1dx = 2e^2 - 2e^0 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - 2 - (e^2 - e^0) = 2e^2 - 2 - e^2 + 1 = e^2 - 1$