M2 : Fonction carré : résolution d'inéquation

But : Résoudre des inéquations par le calcul et graphiquement.

Par le calcul :

1. Isolez x^2
   (le k utilisé dans la suite est le nombre à droite de l'équation)
2. Choisissez le cas adapté à la situation :
   - L'équation $x^2 > k$ admet pour solution l'ensemble
   $$S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right[\cup \left]\sqrt{k}; +\infty\right[$$
   - L'équation $x^2 \geq k$ admet pour solution l'ensemble
   $$S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$$
   - L'équation $x^2 < k$ admet pour solution l'ensemble : $S = \left]-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right[$
   - L'équation $x^2 \leq k$ admet pour solution l'ensemble : $S = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$

Cas particulier : quand $k < 0$, alors l'ensemble des solutions est $S = \mathbb{R}$ si le signe de l'inéquation est $>$ et $S = \emptyset$ si le signe est $<$

Exemple

Résolvez les inéquations suivantes :

$x^2 + 1 > 0$ $\qquad$ $x^2 - 1 \leq 80$

1. On a : $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -1$

Toujours vraie car un carré est positif ou nul donc : $S = \mathbb{R}$

2. On a : $x^2 - 1 \leq 80 \Leftrightarrow x^2 \leq 81$ donc $S = [-9; 9]$

Graphiquement :

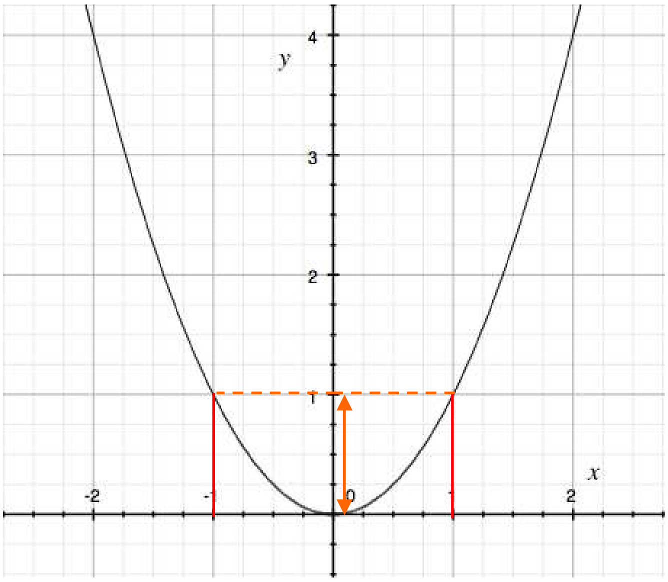
1. Isolez x^2 dans l'équation.
   (le k utilisé dans la suite est le nombre à droite de l'équation)
2. Repérez k sur l'axe des ordonnées et tracez une droite horizontale passant par k
3. Cette droite coupe t'elle la courbe de la fonction carré ?
   - Si oui, tracez une droite verticale passant par ce ou ces points : ces droites coupent l'axe des abscisses. On appellera k et – k la ou les valeurs lues sur cet axe.

- Si le signe est $>$ l'ensemble solution est $S =]-\infty; -\sqrt{k}[\cup]\sqrt{k}; +\infty[$
- Si le signe est $\geq$ l'ensemble solution est $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$
-
- Si le signe est $<$ l'ensemble solution est $S =]-\sqrt{k}; \sqrt{k}[$
- Si le signe est $\leq$ l'ensemble solution est $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$

Exemple

Résolvez graphiquement l'inéquation $x^2 < 1$

On trace la fonction carré, et la droite d'équation $y = 1$:



Une fois le tracé effectué, il suffit de déterminer l'intervalle. Dans cet exemple, on obtient :

$$-1 \leq x \leq 1$$

Donc

$$S = [-1; 1]$$