M2 : Résoudre une équation contenant un logarithme

Objectif : Utiliser le logarithme dans un cadre numérique

Déterminer l'ensemble de définition de $\ln u(x)$

1. Identifiez $u(x)$
2. Résolvez l'inéquation $u(x) > 0$
3. L'ensemble de définition est l'ensemble solution de cette inéquation

Equation de base :

1. Déterminez l'ensemble de définition de la partie de l'équation contenant le logarithme
   - ✓ Si l'équation contient plusieurs logarithmes, déterminez séparément les ensembles de définition de chacun des logs, puis cherchez l'intersection de ces ensembles. (voir exemple 2)
2. Isolez le logarithme d'un côté de l'équation
   - ✓ Si l'équation contient plusieurs logarithmes, transformez cette partie de l'équation en un seul logarithme à l'aide des formules de base. (voir exemple 2)

Si l'autre membre est un logarithme, passez à l'étape 4, sinon passez à l'étape 3

3. Transformez l'autre membre en un logarithme à l'aide de la propriété $a = \ln e^a$
4. Eliminez les logarithmes
5. Résolvez la nouvelle équation obtenue
6. Vérifiez que la ou les solutions appartiennent bien à l'ensemble de définition
7. et concluez à l'aide d'un ensemble de solutions

Remarque : une équation comportant à la fois un logarithme et une fonction polynôme x^n est insoluble en l'état. (par exemple $\ln x = x$)

Changement de variable :

1. Poser $X = \ln x$ et remplacer dans l'équation.
2. Résoudre l'équation du second degré ainsi obtenue et déterminez les valeurs possibles de X.
3. Inversez le changement de variable en posant $x = e^X$
4. Concluez à l'aide d'un ensemble de solutions

Exemple 1

Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(2x-1)$ puis résolvez l'équation $\ln(2x-1) - 3 = 0$

1. $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ donc $D_f =]\frac{1}{2}\ ; +\infty[$
2. $\ln(2x-1) = 3$
3. $\ln(2x-1) = \ln e^3$
4. $2x - 1 = e^3$
5. $x = \frac{e^3+1}{2}$
6. $\frac{e^3+1}{2} \approx 10.54 > \frac{1}{2}$ donc $\frac{e^3+1}{2} \in D_f$
7. $S = \{\frac{e^3+1}{2}\}$

Exemple 2

Résolvez $\ln(2x-1) = \ln 2 - \ln(3-x)$

1. $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ donc $D_1 =]\frac{1}{2}\ ; +\infty[$
   $3 - x > 0 \ \Leftrightarrow x < 3$ donc $D_2 =]-\infty\ ; 3[$
   D'où $D_f = D_1 \cap D_2 =]\frac{1}{2}\ ; 3[$
2. $\ln(2x-1) + \ln(3-x) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(2x-1)(3-x) = \ln 2$
3.
4. $(2x-1)(3-x) = 2$
5. $(2x-1)(3-x) = 2 \Leftrightarrow -2x^2 + 7x - 5 = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9 > 0$ donc il y a deux solutions $\begin{cases} X_1 = \frac{-7-3}{-4} = \frac{5}{2} \\ X_2 = \frac{-7+4}{-4} = \frac{3}{4} \end{cases}$
6. $\frac{5}{2} \in D_f$ et $\frac{3}{4} \in D_f$
7. $S = \{\frac{3}{4}\ ; \frac{5}{2}\}$

Exemple 3 : changement de variable

Résolvez $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

1. On pose $X = \ln x$, on obtient le polynôme $X^2 + 2X - 3 = 0$
2. On résout l'équation :

   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$ donc il y a deux solutions $\begin{cases} X_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \\ X_2 = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$
3. $X_1 = -1$ on a donc $x_1 = e^{-1}$
   $X_2 = 3$, on a donc $x_2 = e^3$.
4. L'ensemble solution est $S = \{e^{-1}\ ;\ e^3\}$