M2 : Etudier des suites adjacentes

Objectif : Démontrer que deux suites sont adjacentes

1. Etudiez le sens de variation de la suite (U_n)
2. Etudiez le sens de variation de la suite (V_n)
   - Si l'une des deux suites est décroissante et l'autre croissante, passez à l'étape 3.
   - Sinon les suites ne sont pas adjacentes
3. Calculez la limite de la suite (U_n) et de la suite (V_n)
   OU calculez la limite de la suite $(U_n - V_n)$
4. Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$
   OU $lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes

Remarque : dans l'exemple qui suit, vous trouverez en rouge la rédaction classique d'une récurrence.

Exemple

Soient (U_n) et (V_n) les suites définies par $U_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ et $V_n = 2 + \frac{3}{n+1}$

Ces suites sont elles adjacentes ?

1. $U_{n+1} - U_n = 2 - \frac{1}{n+1+1} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc la suite (U_n) est strictement croissante
2. $V_{n+1} - V_n = 2 + \frac{3}{n+1+1} - \left(2 + \frac{3}{n+1}\right) = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+1} = \frac{3(n+1)-3(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0$
   donc la suite (V_n) est strictement décroissante
   L'une des deux suites est décroissante et l'autre croissante, on peut passer à l'étape suivante
   Remarque : on aurait tout aussi bien pu étudier le sens de variation des fonctions $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$ *et* $g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$ *sur* $\mathbb{R}^+$*, les deux suites proposées étant explicites.*
3. $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n+1} = 2$
   Et $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{3}{n+1} = 2$
4. Ainsi on a bien $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = 2$: les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes
   Remarque :
   $$\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n+1} - (2 + \frac{3}{n+1})\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-4}{n+1}\right) = 0$$