M2 : Utiliser la loi binomiale

Objectif : Déterminer la probabilité d'obtenir k occurrences d'un même évènement lors de n tentatives.

1. Déterminez la valeur de p

   On se place dans le cadre de Bernoulli : quelle est la probabilité d'un seul succès ?
2. Déterminez la valeur de n

   Combien de fois se répète un même évènement ?
3. Vérifier que les évènements sont bien indépendants deux à deux (généralement énoncé)
4. Appliquer la formule

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque importante : pensez bien à utiliser les évènements contraires. Par exemple, si l'on vous demande la probabilité d'au moins un succès $P(X \geq 1)$ il est souvent plus judicieux de constater que $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

Exemple

On tire une boule 10 fois successivement avec remise dans une urne composée de 5 rouges et 4 bleues. On s'intéresse au nombre de boules rouges tirées au total.

Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges exactement ? Au moins une boule rouge ?

1. Le tirage d'une seule boule suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{5}{9}$.
2. On tire successivement 10 boules donc $n = 10$
3. Les tirages sont effectués avec remise : ils sont donc bien indépendants.
4. Le tirage de 10 boules successivement suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{5}{9}$. Ainsi la probabilité de tirer 3 boules rouges exactement parmi les 10 au total est :

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^3\left(\frac{4}{9}\right)^7 \approx 0.07$$

   De la même manière, la probabilité de tirer au moins une boule rouge est :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{5}{9}\right)^0\left(\frac{4}{9}\right)^{10} \approx 0.999$$