M2 : Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe

Objectif : Passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

Soit un nombre complexe z quelconque.

1. Ecrivez le nombre complexe sous sa forme algébrique $z = a + ib$
2. Identifiez sa partie réelle a et sa partie imaginaire b

   Module :

   Le module est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

   Argument :

   1. Posez le système d'équations : $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$
   2. Simplifiez les deux fractions au maximum

      Rappel : ne laissez jamais de racine au dénominateur
   3. Résolvez ce système à l'aide du cercle trigonométrique (voir cours trigo)
   4. L'argument est $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Remarque : n'oubliez pas que les propriétés des modules et des arguments (voir cours) peuvent dans certains cas vous épargner le passage à la forme algébrique.

Exemples

Déterminer le module et un argument du nombre complexe suivant :

$$z_1 = 4 - 4i\sqrt{3}$$

1. z_1 est déjà sous sa forme algébrique
2. On a : $a = 4$ et $b = -4\sqrt{3}$

Module

On en déduit que : $|z_1| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

Argument

1. On pose le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{4}{8} \\ sin\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8} \end{cases}$
2. $\begin{cases} cos\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
3. On cherche θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
4. On obtient donc $\theta = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$