M2 : Résoudre une équation contenant une exponentielle

Objectif : Utiliser l'exponentielle dans un cadre numérique

Equation de base :

1. Isolez l'exponentielle dans l'équation
2. Transformez l'autre membre en une exponentielle à l'aide de la propriété $a = e^{\ln a}$
3. Eliminez les exponentielles
4. Résolvez la nouvelle équation obtenue et concluez à l'aide d'un ensemble de solutions

Remarque : *une équation comportant à la fois une exponentielle et une fonction polynôme x^n est insoluble.*

Changement de variable :

1. Posez $X = e^x$ et remplacez dans l'équation.
2. Résolvez l'équation du second degré ainsi obtenue et déterminez les valeurs possibles de X.
3. Inversez le changement de variable en posant $x = \ln X$
4. Concluez à l'aide d'un ensemble de solutions

Remarque : *si $X < 0$ il n'est pas possible de calculer $\ln X$: il n'y a donc pas de solution dans ce cas précis.*

Exemple 1

Résolvez $e^{5x} - 1 = 0$

1. $e^{5x} = 1$
2. $e^{5x} = e^{\ln 1}$
3. $5x = \ln 1 = 0$
4. $x = 0$

Exemple 2

Résolvez $2e^{4x} - 3 = 0$

1. $2e^{4x} = 3 \Leftrightarrow e^{4x} = \frac{3}{2}$
2. $e^{4x} = e^{\ln \frac{3}{2}}$
3. $4x = \ln \frac{3}{2}$
4. $x = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4}$

Exemple 3 : changement de variable

Résolvez $e^{2x} - 5e^{x} - 6 = 0$

1. On pose $X = e^{x}$, on obtient :
$$X^2 - 5X - 6 = 0$$
2. On résout l'équation :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 > 0 \text{ donc il y a deux solutions}$$
$$\text{d'où } \begin{cases} X_1 = \dfrac{5-7}{2} = -1 \\ X_2 = \dfrac{5+7}{2} = 6 \end{cases}$$
3. $X_1 = -1$ est impossible car une exponentielle est positive. ($\ln(-1)$ n'existe pas)
$X_2 = 6$ est possible, on a $x_2 = \ln 6$.
4. L'ensemble solution est :
$$S = \{\ln 6\}$$