M2 : Calculer une limite en un point

Objectif : Estimer la valeur de $f(x)$ pour un x proche d'une valeur interdite

La limite d'une fonction en une valeur interdite est TOUJOURS INFINIE (à l'exception de très rares cas particuliers : voir plus bas)

Ne reste plus dès lors qu'à déterminer le signe de la fonction aux abords de ce point.

1. Vérifiez que le point en question est bien une valeur interdite (à l'aide de la représentation graphique de la fonction par exemple)
2. Déterminez le signe de la fonction à gauche de la valeur interdite
3. Déterminez le signe de la fonction à droite de la valeur interdite
4. Remplissez le tableau de signes qui suit
5. Concluez :
   - Du côté où le signe est positif, la limite est $+\infty$
   - Du côté où le signe est négatif, la limite est $-\infty$

Astuce : Il est possible de s'épargner une parfois lourde résolution d'inéquations en choisissant deux valeurs proches de la valeur interdite, l'une à gauche, l'autre à droite et en regardant le signe de leur image par f. (voir exemple)

On présentera le résultat sous la forme :

x	Valeur interdite	
Signe de $f(x)$	Signe à gauche proche de la v.i	Signe à droite proche de la v.i

Remarques :

- *Ce tableau n'est pas le tableau de signes de la fonction sur tout son ensemble de définition ! On ne fera donc pas apparaître les bornes de l'ensemble dans ce cas précis.*
- *Ce tableau de signes est la seule justification qui vous sera demandée en examen.*

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$. Déterminez $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ puis $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{2\}$ donc -2 est bien une valeur interdite pour f
2. Pour $x > 2$ et x proche de 2, on a $x - 2 > 0$ et $3x - 4 > 0$. On en déduit qu'à gauche de 2, on a $\frac{3x+4}{x-2} > 0$

3. Pour $x < 2$ et x proche de 2, on a $x - 2 < 0$ et $3x - 4 > 0$. On en déduit qu'à gauche de 2, on a $\frac{3x+4}{x-2} < 0$
4. En résumé,

x		2	
Signe de $f(x)$	-	‖	+

5. En conclusion, $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$

A l'aide de l'astuce :

Dans notre exemple, on peut calculer par exemple $f(1.9)$ et $f(2.1)$.

Comme $f(1.9) = -97$ (résultat négatif), on en déduit que $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ Comme $f(2.1) = 103$ (résultat positif), on en déduit que $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$

Cas particulier : ''fausse'' valeur interdite

A l'aide d'un exemple :

La fonction $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ admet manifestement pour valeur interdite -1. A priori le calcul des limites de cette fonction aux abords de -1 devrait suivre la règle ci-haut. Cependant le polynôme $x^2 + 2x - 3$ admet pour forme factorisée $(x - 1)(x + 3)$ et après simplification, $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x + 3$. Ainsi la limite aux abords de -1 vaudra $-1 + 3 = 2$, et non pas $\pm\infty$!

Afin d'éviter de vous faire piéger par ce type de fonctions, **tracez la fonction sur votre calculatrice** : si la courbe de la fonction semble être continue aux abords de la valeur interdite, c'est que vous vous trouvez face à un piège.