M2 : Utiliser les suites géométriques

Objectif : Identification, variations, forme explicite et somme de termes d'une suite géométrique

Comment montrer qu'une suite est géométrique ?

Il s'agit de montrer que le résultat du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est indépendant de n.

1. Déterminez indépendamment les expressions de u_n et de u_{n+1}
2. Calculez le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et simplifiez le au maximum
3. Deux cas se présentent :
   - Si le résultat est indépendant de n (ou de u_n) alors la suite est géométrique et le résultat du quotient est q, la raison de la suite
   - Sinon la suite n'est pas géométrique

Comment étudier les variations d'une suite géométrique ?

1. Déterminez la raison q de la suite et identifiez le premier terme U_0
2. Concluez :
   - Si $U_0 > 0$ et $q > 1$ alors la suite est st. croissante
   - Si $U_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite est st. décroissante
   - Si $U_0 < 0$ et $q > 1$ alors la suite est st. décroissante
   - Si $U_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite est st. croissante

Remarque : si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone et n'admet donc pas de sens de variation unique.

Comment déterminer la forme explicite d'une suite géométrique ?

Il s'agit d'exprimer la suite en fonction de n

1. Montrez que la suite est géométrique
2. Identifiez la raison q de cette suite
3. Calculez le premier terme de la suite
4. Deux cas se présentent :
   - Si le premier terme est u_0 la forme explicite est $u_n = u_0 \times q^n$
   - Si le premier terme est u_1 la forme explicite est $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ?

1. Calculez le premier terme de la somme
2. Identifiez la raison de la suite
3. Comptez le nombre de termes de la somme
4. La somme vaut alors :

$$S = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{\,nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$$

Remarque : Attention à cette erreur courante : Le nombre de termes d'une somme est donné par $rang\ du\ dernier\ terme - rang\ du\ premier\ terme + 1$

Par exemple, dans la somme $u_3 + u_4 + \ ... + u_{12}$*, il n'y a pas* $12 - 3 = 9$ *termes mais bien* $12 - 3 + 1 = 10$ *termes ! Comptez les pour vous en convaincre…*

Exemple : suite définie par récurrence

On considère la suite de premier terme $u_0 = 6$ et de terme général $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$

- La suite (u_n) est elle géométrique ?
  1. $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ (donné dans l'énoncé)
  2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3}u_n}{u_n} = \frac{1}{3}$
  3. Le résultat est indépendant de n : la suite est donc bien géométrique. De plus, sa raison est $\frac{1}{3}$
- Etudiez les variations de la suite (u_n)
  1. $q = \frac{1}{3}$
  2. $q < 1$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante
- Exprimez la suite (u_n) en fonction de n
  1. La suite est bien géométrique (voir plus haut)
  2. Sa raison est $\frac{1}{3}$
  3. $u_0 = 6$
  4. On a donc $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times (\frac{1}{3})^n$
- Calculez la somme des 10 premiers termes de cette suite.
  1. $u_0 = 1$
  2. Sa raison est $\frac{1}{3}$
  3. La somme compte $9 - 0 + 1 = 10$ termes
  4. $S = premier\ terme \times \frac{1-raison^{\ nombre\ de\ termes}}{1-raison} = 6 \times \frac{1-\frac{1}{3}^{11}}{1-\frac{1}{3}} = 1.49$

Exemple : suite explicite

On considère la suite $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

- La suite (u_n) est elle géométrique ?
  1. $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1+1}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$ et $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$
  2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{3^n}{2^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
  3. Le résultat est indépendant de n : la suite est donc bien géométrique. De plus, sa raison est $\frac{3}{2}$

- Etudiez les variations de la suite (u_n)
  1. $u_{n+1} = 2n - 3$ et $u_n = 2n - 5$
  2. $u_{n+1} - u_n = 2$
  3. $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante
- Exprimez la suite (u_n) en fonction de n
  1. La suite est bien arithmétique (voir plus haut)
  2. Sa raison est 2
  3. $u_0 = -5$
  4. On a donc $u_n = u_0 + nr = -5 + 2n$
- Calculez la somme $u_3 + \cdots + u_{11}$.
  1. $u_0 = -5$
  2. Sa raison est 2
  3. La somme compte $11 - 3 + 1 = 9$ termes
  4. $S = -5 \times \frac{1-2^9}{1-2} = -2555$