M2 Utiliser les propriétés graphiques d'un polynôme : variations et sommet

Objectif : Comprendre l'utilité des polynômes d'un point de vue graphique

On donne le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$. Sa représentation graphique est une parabole si $a \neq 0$, sinon c'est une droite.

Coordonnées du sommet de la parabole

1. Identifiez a et b
2. Calculez $-\frac{b}{2a}$: il s'agit de l'abscisse du sommet
3. Calculez $P\left(-\frac{b}{2a}\right)$: il s'agit de l'ordonnée du sommet
4. Les coordonnées du sommet sont donc $(-\frac{b}{2a}\ ;\ P\left(-\frac{b}{2a}\right))$

Sens de variation de la parabole

1. Identifiez a
2. Deux cas se présentent :
   - Si $a > 0$, la parabole est décroissante jusqu'à $x = -\frac{b}{2a}$, puis croissante à partir de $x = -\frac{b}{2a}$
     La fonction P admet donc un minimum en $-\frac{b}{2a}$
   - Si $a < 0$, la parabole est croissante jusqu'à $x = -\frac{b}{2a}$, puis décroissante à partir de $x = -\frac{b}{2a}$
     La fonction P admet donc un maximum en $-\frac{b}{2a}$

Exemple

Soit $P(x) = 2x^2 - 6x - 8$. Déterminez les coordonnées du sommet de sa parabole, puis son sens de variation.

Coordonnées du sommet de la parabole

1. $a = 2$ et $b = -6$
2. $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times 2} = \frac{3}{2}$
3. $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = P\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{3}{2} - 8 = \frac{9}{2} - \frac{18}{2} - 8 = -\frac{25}{2}$
4. Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc $(\frac{3}{2}\ ; -\frac{25}{2})$

Sens de variation de la parabole

1. $a = 2$
2. $a > 0$ donc la parabole est décroissante jusqu'à $x = \frac{3}{2}$, puis croissante à partir de $x = \frac{3}{2}$.

   Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Variations de P	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{25}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$