M2 : Utiliser la colinéarité de vecteurs

Objectif : Démontrer que des droites sont parallèles ou que des points sont alignés

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}\binom{x\prime}{y\prime}$

Méthode 1

1. Calculez $x \times y' - x' \times y$
2. Si cette quantité vaut 0, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Méthode 2

1. Posez $\vec{u} = k \times \vec{v}$ c'est-à-dire $\binom{x}{y} = k \times \binom{x\prime}{y\prime}$
2. Cette équation équivaut au système $\begin{cases} x = k \times y \\ x' = k \times y' \end{cases}$
3. Résolvez ce système où l'inconnue est k
4. Si la valeur de k trouvée est unique (la même dans les deux équations) alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de rapport k

   Si vous trouvez deux solutions k distinctes, alors les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conséquences de la colinéarité :

- Parallélisme :

  Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Alignement de points :

  Si deux vecteurs contenant un sommet en commun (par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) sont colinéaires, alors les 3 points composant ces vecteurs sont alignés (ici A , B et C)

Exemple

On donne les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;-1)$ et $C(-4\,;\frac{19}{2})$

Les points A, B et C sont ils alignés ?

On cherche à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{3-1}{-1-2} = \binom{2}{-3}$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -4-1 \\ \frac{19}{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

Méthode 1

1. $x \times y' - x' \times y = 2 \times \frac{14}{2} - (-5) \times (-3) = 15 - 15 = 0$
2. Puisque $x \times y' - x' \times y = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc les points A, B et C sont bien alignés.

Méthode 2

1. $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$
2. $\binom{2}{-3} = k \times \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \times (-5) \\ -3 = k \times \frac{15}{2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} k = -\frac{5}{2} \\ k = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} \end{cases}$
4. Donc $\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc les points A, B et C sont bien alignés.

Remarque : on aurait tout aussi bien pu démontrer l'alignement à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$…du moment que l'un des 3 points concernés apparaît dans les deux vecteurs à la fois.