M1 : Calculer des primitives

Objectif : Déterminer la fonction F dont la dérivée est f

Déterminer une primitive F d'une fonction f (constante nulle)

(suivez un exemple en même temps, sinon c'est incompréhensible)

1. Identifiez dans la première colonne du tableau du cours de quelle forme est f
2. Identifiez u, puis calculez u' : vous obtenez ce que devrait être votre fonction si elle tombait pile dans les conditions d'application du tableau
3. Faites apparaître la formule ($u'e^u, \frac{u'}{u^2}$ ...) exacte dans votre fonction f
4. Appliquez la formule adéquate du tableau, sans oublier ce que vous aviez extrait au préalable

Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction f

1. Déterminez une primitive F de la fonction f
2. Ajoutez une constante réelle k au résultat obtenu
3. Concluez : l'ensemble des primitives de la fonction est $F(x) + k$

Déterminer la primitive d'une fonction f vérifiant une condition initiale $F(a) = b$

1. Déterminez l'ensemble des primitives de la fonction f : vous obtenez un résultat de la forme $F(x) + k$
2. Calculez $F(a)$ sans oublier la constante k
3. Résolvez l'équation $F(a) = b$: vous obtenez la valeur de la constante k
4. Concluez : la primitive vérifiant la condition initiale est $F(x) + k$, avec k prenant la valeur obtenue en 3.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}$

Déterminez l'ensemble des primitives de la fonction f, puis la primitive vérifiant la condition $F(0) = 1$

<u>Ensemble des primitives de f</u>

1. La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$, dont la primitive est de la forme $-\frac{1}{u}$
2. $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$: ainsi $\frac{u'}{u^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$: il va s'agir d'extraire la formule exacte de l'expression de f
3. $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
4. $F(x) = \frac{3}{2} \times (-\frac{1}{x^2+1})$

Ainsi, l'ensemble des primitives de f est $F(x) + k = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) + k$

Primitive vérifiant la condition $F(0) = 1$

1. L'ensemble des primitives de f est $F(x) + k = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) + k$
2. $F(0) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{0^2+1}\right) + k = -\frac{3}{2} + k$
3. $-\frac{3}{2} + k = 1 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$
4. La primitive vérifiant la condition initiale est donc $\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) + \frac{5}{2}$