M1 : Démontrer par récurrence

Objectif : Montrer qu'une conjecture vraie pour ses premiers rangs est également vraie pour tout n

1. Posez $\mathcal{P}_n$ la proposition à démontrer
2. Initialisation : identifiez le rang initial de la suite et démontrez que $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.
3. Hérédité : supposez que $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang n et démontrez qu'elle est vraie au rang $n + 1$

Remarques :

1. *Dans l'exemple qui suit, vous trouverez en rouge une rédaction que vous pourrez appliquer à chacune de vos récurrences.*
2. *La méthode qui précède ne concerne que les récurrences dites simples ou unitaires. Vous pourrez occasionnellement croiser ce que l'on nomme des récurrences doubles ou fortes. Le principe de résolution reste le même, à ces deux différences près :*
   - *à l'étape d'initialisation vous devrez vérifier la propriété aux rangs initiaux*
   - *à l'étape d'hérédité vous devrez supposer que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies pour montrer $\mathcal{P}_{n+2}$.*

   Vous trouverez un exemple de récurrence double à la fin de l'exercice 4.

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 5}$.

Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 3$.

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n \leq 3$ »
2. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   INITIALISATION :
   $U_0 = 1 \leq 3$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.
3. HEREDITE : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $U_n \leq 3 \Leftrightarrow U_n + 5 \leq 8 \Leftrightarrow \sqrt{U_n + 5} \leq \sqrt{8} \Leftrightarrow U_{n+1} \leq \sqrt{8} < 3$
   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.