M1 : Utiliser des variables aléatoires

Objectif : Associer une probabilité à un contexte numérique

Loi de probabilité :

Il s'agit de remplir les cases marquées de rouge du tableau :

X	x_1	x_2	………………….	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	………………….	p_k

1. Déterminer <u>toutes</u> les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X
2. Calculer séparément $P(X = \text{chacune des valeurs trouvées})$
3. Remplir le tableau

Remarque : *On pourra vérifier que la somme des probabilités vaut bien* 1

Espérance, variance et écart type :

- ***<u>Espérance</u>*** : multipliez séparément x_1 et p_1 , x_2 et p_2 … x_n et p_n puis additionnez ces résultats entre eux
- ***<u>Variance</u>*** : multipliez séparément ${x_1}^2$ et p_1 , ${x_2}^2$ et p_2 … ${x_n}^2$ et p_n, additionnez ces résultats entre eux puis soustrayez au résultat obtenu le carré de l'espérance ci-dessus
- ***<u>Ecart type</u>*** : calculez la racine de la variance

Exemple

Supposons que les 6 faces d'un dé cubique équilibré sont marquées 1, 2, 2, 3, 3 et 3.

Soit X la variable aléatoire associée au résultat que l'on peut obtenir en lançant un tel dé.

- Déterminons la loi de probabilité de X

1. X peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3.
   Ainsi,

$$x_1 = 1 , x_2 = 2, x_3 = 3$$

2. Par suite,

$$\begin{cases} p_1 = P(X=1) = \frac{1}{6} \\ p_2 = P(X=2) = \frac{2}{6} \\ p_3 = P(X=3) = \frac{3}{6} \end{cases}$$

3. Donc X suit la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

- Calculons son espérance, sa variance et son écart type

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Et donc $(E(X))^2 = \frac{49}{9}$.

D'autre part, $E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{2}{6} + 3^2 \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = \frac{36}{6} = 6$.

On en déduit que

$$V(X) = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$$

Pour finir,

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$