M1 : Utiliser la formule de Bayes

Objectif : Déterminer la valeur d'une probabilité conditionnelle

Il s'agit d'appliquer la formule

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1. Commencez bien par déterminer quel évènement est conditionné à la réalisation de l'autre : pensez à l'ordre de déroulement des évènements.
   - ✓ Si A se déroule avant B, alors la probabilité sera $P_A(B)$
   - ✓ Si B se déroule avant A, alors la probabilité sera $P_B(A)$
2. Appliquez la formule concernée

Remarque : Il ne faut pas confondre $P_B(A)$ et $P_A(B)$. En règle générale ces deux quantités sont très différentes.

Exemple

Une urne U_1 contient une boule verte et quatre rouges.

Une urne U_2 contient cinq boules vertes et deux rouges.

On choisit simultanément une boule dans chaque urne, on les en retire puis on les place dans l'autre urne.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : 'l'urne U_1 ne contient que des boules rouges'

B : 'chacune des urnes a la même composition qu'au départ'

- Calculons la probabilité de A

On cherche la probabilité de retirer la boule verte de l'urne U_1 et de retirer une boule rouge de l'urne U_2 (tout autre cas de figure ne mènerait pas à une urne U_1 composée uniquement de boules rouges)

La probabilité de tirer une verte sachant que l'on a choisi l'urne U_1, est ainsi $P_{U_1}(V)$.

Or, $P_{U_1}(V) = \frac{P(U_1 \cap V)}{P(U_1)} = = \frac{1}{5}$

La probabilité de tirer une rouge sachant que l'on a choisi l'urne U_2, est ainsi $P_{U_2}(R)$.

Or, $P_{U_2}(R) = \frac{P(U_2 \cap R)}{P(U_2)} = \frac{2}{7}$

Ces évènements étant indépendants, la probabilité recherchée est $P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{35}$

- Calculons la probabilité de B

Pour que les urnes aient la même composition qu'avant le tirage, il faut que l'on tire une verte de chacune des urnes ou une rouge de chacune des urnes. En suivant la méthode précédente, on a : probabilité de deux vertes = $\frac{1}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7}$ et probabilité de deux rouges = $\frac{4}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{35}$. Enfin $P(B) = \frac{5}{35} + \frac{8}{35} = \frac{13}{35}$