M1 : Calculer une limite en l'infini

Objectif : Estimer la valeur de $f(x)$ pour un x extrêmement grand ou petit

Calculer une limite :

1. Décomposer la fonction dont on cherche la limite en somme, différence, produit ou quotient de fonctions usuelles.
2. Utiliser les propriétés des opérations sur les limites.
3. Calculez la limite de la fonction de départ :
   - Si le résultat n'est pas une forme indéterminée : conclure
   - Si le résultat est une forme indéterminée, il faut lever l'indétermination avant de pouvoir conclure (voir méthode suivante)

Lever l'indétermination d'un polynôme :

<u>1ère méthode (ES)</u> :

On peut considérer que la limite d'un polynôme est celle de son de terme de plus haut degré.

<u>Exemple</u> : Calculons à l'aide de la méthode ES la limite de $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \lim_{x\to+\infty} 2x + \lim_{x\to+\infty} 1$ est une forme indéterminée du type $'' + \infty - \infty''$

On peut lever l'indétermination en considérant, puisque le terme de plus haut degré du polynôme est x^2, que $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

<u>2ème méthode (S)</u> :

Pour lever l'indétermination d'un polynôme, il faut factoriser ce polynôme par son terme de plus haut degré.

Remarque : Dans le cas de la limite d'un quotient, une fois la factorisation faite, il ne faut pas oublier de <u>simplifier au maximum</u> la nouvelle fonction obtenue.

<u>Exemple</u> : Calculons à l'aide de la méthode S la limite de $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \lim_{x\to+\infty} 2x + \lim_{x\to+\infty} 1$$

est une forme indéterminée du type $'' + \infty - \infty''$

Le terme de plus haut degré du polynôme est x^2 : on va donc factoriser par x^2. Ce qui donne, $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

On déduit que $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 + 0 + 0) = +\infty$

Exemple

Calculez à l'aide des deux méthodes présentées $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+3}{-4x^2+8x-7}$

1. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{-4x^2 + 8x - 7} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 - 5x + 3}{\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2 + 8x - 7}$$

2. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^2 - 5x + 3 = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 - \lim_{x\to-\infty} 5x + \lim_{x\to-\infty} 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty \\ \text{On a} -\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = +\infty \\ \text{On a } \lim\limits_{x\to-\infty} 3 = 3 \end{array}\right\} \text{ On en déduit que } \lim_{x\to-\infty} 2x^2 - 5x + 3 = +\infty$$

De la même manière,

$$\lim_{x\to-\infty} -4x^2 + 8x - 7 = -\lim_{x\to-\infty} 4x^2 + \lim_{x\to-\infty} 8x - \lim_{x\to-\infty} 7$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } -\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2 = -\infty \\ \text{On a } \lim\limits_{x\to-\infty} 8x = -\infty \\ \text{On a } \lim\limits_{x\to-\infty} 7 = 7 \end{array}\right\} \text{ On en déduit que } \lim_{x\to-\infty} -4x^2 + 8x - 7 = -\infty$$

3. On peut maintenant étudier la limite du quotient : on constate qu'il s'agit d'une forme indéterminée du type $"\frac{+\infty}{-\infty}"$

   On se retrouve donc dans l'obligation de <u>lever cette indétermination</u>

<u>1ère méthode (ES)</u> :

Le terme de plus haut degré du polynôme au numérateur est $2x^2$.

Le terme de plus haut degré au dénominateur est $-4x^2$

On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+3}{-4x^2+8x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{-4x^2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

<u>2ème méthode (S)</u> :

Le terme de plus haut degré du polynôme au numérateur est $2x^2$. On va donc factoriser par $2x^2$.

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2\left(1 - \frac{5x}{2x^2} + \frac{3}{2x^2}\right) = 2x^2\left(1 - \frac{5}{2x} + \frac{3}{2x^2}\right)$$

Le terme de plus haut degré du polynôme au dénominateur est $-4x^2$.

$$-4x^2 + 8x - 7 = -4x^2\left(1 + \frac{8x}{-4x^2} - \frac{7}{-4x^2}\right) = -4x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{4x^2}\right)$$

Ce qui donne :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{-4x^2 + 8x - 7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2\left(1 - \frac{5}{2x} + \frac{3}{2x^2}\right)}{-4x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{4x^2}\right)}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7}{4x^2} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{5}{2x} + \frac{3}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{4x^2}\right) = 1$

On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+3}{-4x^2+8x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{-4x^2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$