M1 : Utiliser les suites arithmétiques

Objectif : Identification, variations, forme explicite, convergence et somme de termes d'une suite arithmétique

Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?

Il s'agit de montrer que le résultat de la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n.

1. Déterminez séparément les expressions de u_n et de u_{n+1}
2. Calculez la différence $u_{n+1} - u_n$ et simplifiez la au maximum
3. Deux cas se présentent :
   - Si le résultat est indépendant de n (ou de u_n) alors la suite est arithmétique et le résultat de la différence est r, la raison de la suite
   - Sinon la suite n'est pas arithmétique

Comment étudier les variations d'une suite arithmétique ?

1. Identifiez la valeur de la raison r : résultat de la différence $u_{n+1} - u_n$
2. Concluez :
   - Si $r > 0$ alors la suite est st. croissante
   - Si $r < 0$ alors la suite est st. décroissante
   - Si $r = 0$ alors la suite est constante

Comment déterminer la forme explicite d'une suite arithmétique ?

Il s'agit d'exprimer la suite en fonction de n

1. Montrez que la suite est arithmétique
2. Identifiez la raison r de cette suite
3. Calculez le premier terme de la suite
4. Deux cas se présentent :
   - Si le premier terme est u_0 la forme explicite est $u_n = u_0 + nr$
   - Si le premier terme est u_1 la forme explicite est $u_n = u_1 + (n-1)r$

Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

1. Calculez le premier terme de la somme
2. Calculez le dernier terme de la somme
3. Comptez le nombre de termes de la somme
4. La somme vaut alors :

$$S = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times\ nombre\ de\ termes}{2}$$

Remarque : Attention à cette erreur courante : Le nombre de termes d'une somme est donné par $\text{rang du dernier terme} - \text{rang du premier terme} + 1$

Par exemple, dans la somme $u_3 + u_4 + \ldots + u_{12}$, il n'y a pas $12 - 3 = 9$ termes mais bien $12 - 3 + 1 = 10$ termes ! Comptez les pour vous en convaincre…

Exemple 1 : suite définie par récurrence

On considère la suite de premier terme $u_0 = 1$ et de terme général $u_{n+1} = 2 + u_n$

- La suite (u_n) est elle arithmétique ?
  1. $u_{n+1} = 2 + u_n$ (donné dans l'énoncé)
  2. $u_{n+1} - u_n = 2 + u_n - u_n = 2$
  3. Le résultat est indépendant de n : la suite est donc bien arithmétique. De plus, sa raison est 2
- Etudiez les variations de la suite (u_n)
  1. $u_{n+1} - u_n = 2 + u_n - u_n = 2$
  2. $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante
- Exprimez la suite (u_n) en fonction de n
  1. La suite est bien arithmétique (voir plus haut)
  2. Sa raison est 2
  3. $u_0 = 1$
  4. On a donc $u_n = u_0 + nr = 1 + 2n$
- Calculez la somme des 10 premiers termes de cette suite.
  1. $u_0 = 1$
  2. $u_9 = 1 + 2 \times 9 = 19$
  3. La somme compte $9 - 0 + 1 = 10$ termes
  4. $S = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times nombre\ de\ termes}{2} = \frac{(1+19) \times 10}{2} = 100$

Exemple 2 : suite explicite

On considère la suite $u_n = 2n - 5$

- La suite (u_n) est elle arithmétique ?
  1. $u_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n + 2 - 5 = 2n - 3$
  2. $u_{n+1} - u_n = 2n - 3 - (2n - 5) = 2n - 3 - 2n + 5 = 2$
  3. Le résultat est indépendant de n : la suite est donc bien arithmétique. De plus, sa raison est 2
- Etudiez les variations de la suite (u_n)
  1. $u_{n+1} - u_n = 2$
  2. $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante
- Exprimez la suite (u_n) en fonction de n
  1. La suite est bien arithmétique (voir plus haut)
  2. Sa raison est 2
  3. $u_0 = -5$

4. On a donc $u_n = u_0 + nr = -5 + 2n$

- Calculez la somme $u_3 + \cdots + u_{11}$

1. $u_0 = -5$
2. $u_{11} = -5 + 2 \times 11 = -5 + 22 = 17$
3. La somme compte $11 - 3 + 1 = 9$ termes
4. $S = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times nombre\ de\ termes}{2} = \frac{(-5+17) \times 9}{2} = 54$