M1 : Mettre un polynôme sous forme canonique

Objectif : Mettre en évidence les valeurs remarquables d'un polynôme et factoriser

On donne le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

Méthode 1 : utiliser la formule

1. Calculez $\alpha = -\frac{b}{2a}$
2. Calculez $\beta = P(\alpha)$
3. Remplacez α et β par leurs valeurs dans l'expression $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Méthode 2 : ''à la main''

1. Identifiez a, b et c
2. Factorisez $P(x)$ par a : on aura $P(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
3. Déterminez la valeur α telle que l'on ait $\alpha = \frac{b}{2a}$
   L'idée est de trouver l'identité remarquable qui, une fois développée, fera apparaître $x^2 + \frac{b}{a}x$
4. Posez $P(x) = a[(x+\alpha)^2 - \alpha^2 + \frac{c}{a})]$
   L'idée est de se débarrasser du troisième terme de l'identité remarquable, qui n'apparait pas dans notre polynôme
5. Simplifiez l'expression au maximum

Exemple

Déterminez la forme canonique de $P(x) = 2x^2 - 6x - 8$

Méthode 1 : utiliser la formule

1. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2. $\beta = P\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{3}{2}\right) - 8 = -\frac{25}{2}$
3. $P(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$

Méthode 2 : ''à la main''

1. $a = 2, b = -6$ et $c = -8$
2. $P(x) = 2(x^2 - 3x - 4)$
3. $\alpha = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$
4. $P(x) = 2[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4)]$
5. $P(x) = 2[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4)] = 2[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4)] = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$