

M1 : Utiliser les coordonnées de vecteurs

Objectif : Etudier les propriétés vectorielles d'un point de vue numérique

Si A et B ont pour coordonnées $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$

Coordonnées d'un vecteur

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu d'un segment

Le point I , milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Longueur d'un segment

La longueur du segment $[AB]$, notée AB ou $\|\overrightarrow{AB}\|$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple

On donne les points $A(2 ; 5)$ et $B(-1 ; 3)$

Déterminez les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} . Sans calcul, donnez les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BA}

Déterminez les coordonnées du milieu puis la longueur du segment $[AB]$

On donne le point $C(2 ; -2)$. Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$, puis les coordonnées du point D tel que l'on ait $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le point I , milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $x_I = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{5+3}{2} = 4$

La longueur du segment $[AB]$ est

$$AB = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-2 \\ -2-5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-6) \\ -7 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -17 \end{pmatrix}$

Les coordonnées du point D vérifient $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$ donc $\begin{pmatrix} x_D - (-1) \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -17 \end{pmatrix}$ et au final $\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ -17 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix}$