Corrigés des exercices

Utiliser les formules

Exercice 1 :

$$A = \cos(\pi + x) + 2\cos(2\pi + x) + 3\cos(3\pi + x)$$
$$= -\cos x + 2\cos x - 3\cos x = -2\cos x$$

$$B = \sin(5\pi - x) + 2\sin(-5\pi - x) = \sin x + 2\sin x = 3\sin x$$

$$C = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = \sin x - \sin x = 0$$

$$D = \sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(\frac{5\pi}{2} - x) = -\cos x + \cos x = 0$$

Exercice 2 :

1. On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ d'où $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ou $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$
   Ce qui nous donne ici $\sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
   Or on sait que $x \in [-\pi\,;0]$. Ainsi $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
2.

$$\cos(4\pi - x) = \cos(\pi - x) = \cos(-x) = -\cos x = \frac{1}{3}$$

$$\sin(3\pi + x) = \sin(2\pi + x) = -\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-(\frac{\pi}{2} - x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-(\frac{5\pi}{2} + x)\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$$
$$= -\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x = -\frac{1}{3}$$

Exercice 3 :

1. On sait que $\cos(x) = \frac{1}{3}$ et que $x \in [-\pi\,;0]$

Ainsi $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ou $-\sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\sin x = \sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}$ ou $-\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}$

$\sin x = \sqrt{1-\frac{1}{9}}$ ou $-\sqrt{1-\frac{1}{9}}$

$\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $-\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

De plus, puisque $x \in [-\pi\,;0]$, on choisit la valeur de sinus négative. Ainsi $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $\cos(4\pi - x) = \cos(-x) = \cos x = \frac{1}{3}$

   $\sin(3\pi + x) = -\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

   $\cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

   $\sin\left(-\frac{5\pi}{2} - x\right) = -\cos x = -\frac{1}{3}$

Exercice 4 :

Dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$:

$$\alpha = \frac{29\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 4 \times \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 4 \times 2\pi$$

$$\beta = -\frac{37\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} - 4 \times \frac{10\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} - 4 \times 2\pi$$

Exercice 5 :

1. $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$
2. $\cos(x+y)\cos(x-y) = (\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\cos x\cos y + \sin x\sin y) = \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y = \cos^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\cos^2 x)\sin^2 y = \cos^2 x - \cos^2 x\sin^2 y\sin^2 y + \cos^2 x\sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y$

Résoudre une équation trigonométrique

Exercice 6 :

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ ou $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\sin 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = x - \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow$ $x = -2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0$ avec le changement de variable $X = \cos x$

D'où $X_1 = 1$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$ cad $x_1 = 2k\pi$ et $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{6} + x) = -1$ (formule d'addition)

$$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{6} + x) = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Utiliser des coordonnées polaires et des angles orientés

Exercice 8 :

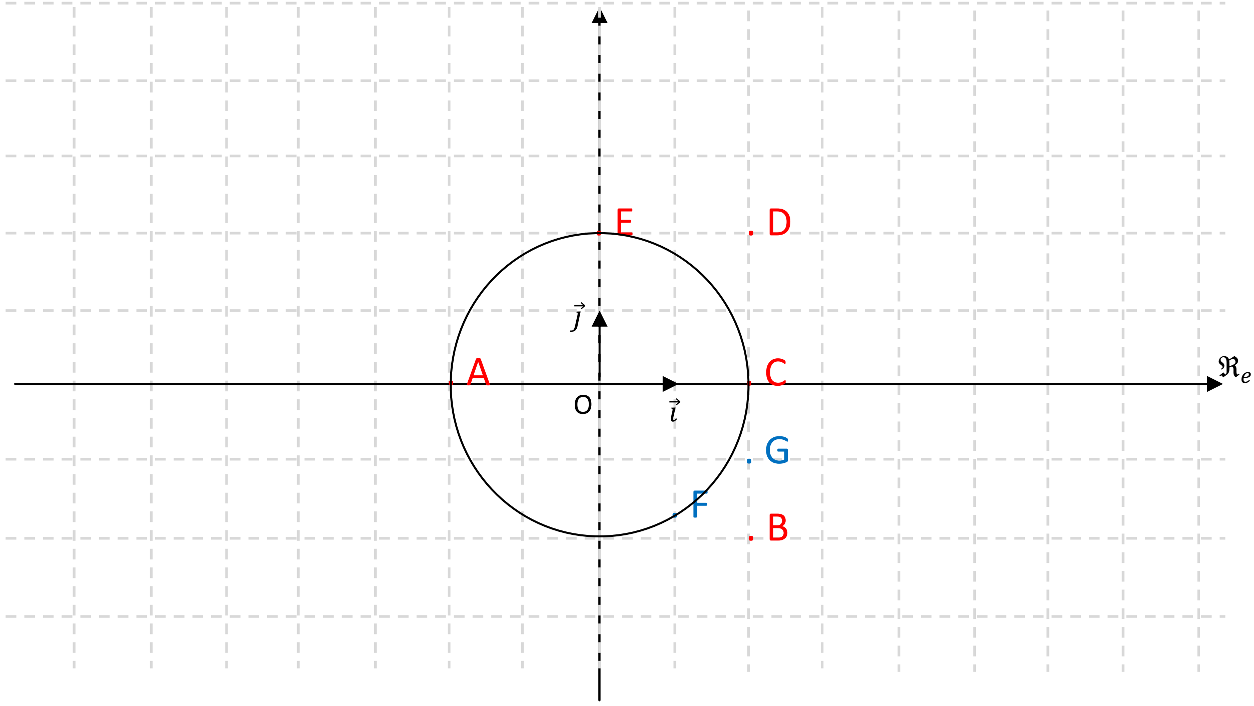
$$\rho = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (\frac{16}{5})^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{400}{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{12/5}{4} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} \\ \sin\theta = \dfrac{16/5}{4} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

A l'aide d'une calculatrice on trouve $\theta \approx 53°$ à 1° près

Exercice 9 :

1.



Afin de déterminer graphiquement les coordonnées polaires d'un point il suffit de lire sa distance au point O (donne ρ) et son angle à l'abscisse (donne θ)

On aura donc ici $A(2\ ;\ \pi)$; $B(2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4})$; $C(2\ ;\ 0)$; $D(2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4})$ et $E(2\ ;\ \frac{\pi}{2})$

2. Graphiquement : le point F est sur le cercle de centre O et de rayon 2 : il suffit dès lors de mesurer un angle de 60° dans le sens indirect pour trouver la position de F.

   Numériquement : Pour $\theta = -\frac{\pi}{3}$ on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $x = 1$ et $y = -\sqrt{3}$

3. Soit G le milieu du segment $[BC]$
   a. Cette question équivaut à déterminer les coordonnées polaires de G

      G a pour coordonnées cartésiennes $G\left(\frac{2+2}{2}\ ;\ \frac{-2+0}{2}\right) = (2\ ;\ -1)$

      Ses coordonnées polaires sont donc :

$$\rho = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

A l'aide d'une calculatrice on trouve $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OG}) \approx 27°$ à 1° près (dans le sens indirect)

b. Déduisez en une valeur approchée à 1° près de l'angle $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OF}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{OG}) \approx 60 - 27 \approx 33°$ à 1° près (dans le sens indirect)

Exercice 10 :

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ a pour coordonnées polaires $\rho = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$

On va calculer les coordonnées cartésiennes exactes de l'image du point A, à l'aide des formules d'addition :

$$x' = \rho \cos\theta = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 2(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

$$y' = \rho \sin\theta = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 2(\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{1}{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$