Corrigés des exercices

Calculer des primitives

Exercice 1 :

- $f_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = f_1(x) = x^3 + 2 \times x^2 + 4 \times x + 1$

$$F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 2 \times \frac{x^3}{3} + 4 \times \frac{x^2}{2} + x = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + x$$

- $f_2(x) = 12x^{17} - 2x^3 - x = 12 \times x^{17} - 2 \times x^3 - x$

$$F_2(x) = 12 \times \frac{x^{18}}{18} - 2 \times \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{2x^{18}}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}$$

- $f_3(x) = 3x(x^2 - 1)^3$

On reconnaît la formule $u'u^n$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ u' = 2x \\ n = 3 \end{cases}$$

Il faut transformer la fonction :

$$f_3(x) = \frac{3}{2} \times 2x(x^2 - 1)^3$$

On obtient :

$$F_3(x) = \frac{3}{2} \times \frac{(x^2 - 1)^4}{4} = \frac{3}{8}(x^2 - 1)^4$$

- $f_4(x) = \frac{7}{\sqrt{2x+3}}$

On reconnaît la formule $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec

$$\begin{cases} u = 2x + 3 \\ u' = 2 \end{cases}$$

Il faut transformer la fonction :

$$f_4(x) = \frac{2 \times \frac{7}{2}}{\sqrt{2x + 3}} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2x + 3}}$$

On obtient :

$$F_4(x) = \frac{7}{2} \times 2\sqrt{2x + 3} = 7\sqrt{2x + 3}$$

- $f_5(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$

On reconnaît la formule $\frac{u'}{u^n}$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ u' = 2x \\ n = 2 \end{cases}$$

Il faut transformer la fonction :

$$f_5(x) = \frac{\frac{1}{2} \times 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

On obtient :

$$F_5(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{1 \times (x^2 - 1)^1} = \frac{-1}{2(x^2 - 1)}$$

- $f_6(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{2x^4} = 3 \times x^{-2} + 5 \times x^{-3} + \frac{1}{2} \times x^{-4}$

$$F_6(x) = 3 \times \frac{x^{-1}}{-1} + 5 \times \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{2} \times \frac{x^{-3}}{-3} = -3x^{-1} - \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{1}{6}x^{-3} = \frac{-3}{x} - \frac{5}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}$$

- $f_7(x) = \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

On reconnaît la formule $\frac{u'}{u}$ avec

$$\begin{cases} u = \ln x \\ u' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

On obtient :

$$F_7(x) = \ln(\ln x)$$

- $f_8(x) = \frac{e^x}{e^x + 4}$

On reconnaît la formule $\frac{u'}{u}$ avec

$$\begin{cases} u = e^x + 4 \\ u' = e^x \end{cases}$$

On obtient :

$$F_8(x) = \ln(e^x + 4)$$

- $f_9(x) = \tan^2 x - \frac{\cos x}{2}$

Il faut modifier la fonction :

$$f_9(x) = \tan^2 x - \frac{\cos x}{2} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{2} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - \frac{\cos x}{2}$$

On a donc :

$$F_9(x) = \tan x - x - \frac{\sin x}{2}$$

Exercice 2 :

$f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x^3}$

Une primitive est : $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{2x^2}$

$g(x) = \frac{5x^4 + 2x^3 - 3x + 6}{x^3} = 5x + 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3}$

Une primitive est : $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}$

$h(x) = \frac{3x^2+2}{(x^3+2x)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^n}$

Une primitive est : $H(x) = -\frac{1}{x^3+2x}$

$i(x) = \frac{2}{3(2x+3)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^n}$

Une primitive est : $I(x) = -\frac{1}{6x+9}$

Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{4x^3 + x + 2}{x} = \frac{4x^3}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 4x^2 + 1 + \frac{2}{x}$$

Ainsi l'ensemble des primitives est :

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x + 2\ln(x) + k$$

De plus, on souhaite que $F(1) = 2$, c'est-à-dire

$$F(1) = \frac{4}{3}1^3 + 1 + 2\ln(1) + k = \frac{4}{3} + 1 + 0 + k = \frac{7}{3} + k = 2$$

Donc $k = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$ et la primitive vérifiant la condition initiale est

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x + 2\ln(x) - \frac{1}{3}$$

Exercice 4 :

$f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

Toutes les primitives sont de la forme : $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + k$

Par ailleurs, $F(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 1 + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$

Ainsi la primitive recherchée est $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{5}{3}$

Calculer des intégrales

Exercice 5 :

$$\int_0^2 (x + 4 - 2e^x)dx = [\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2e^x]_0^2 = \frac{1}{2}2^2 + 4 \times 2 - 2e^2 - \left(\frac{1}{2}0^2 + 4 \times 0 - 2e^0\right)$$
$$= 2 + 8 - 2e^2 + 2 = 12 - 2e^2$$

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx = [\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times (3x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = [\frac{2}{9} \times (3x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{9} \times (3 \times 1 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \times (3 \times 0 + 1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{9} \times (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^1 = \ln(e^1 + e^{-1}) - \ln(e^0 + e^{-0}) = \ln(e^1 + e^{-1}) - \ln(2)$$

Exercice 6:

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{(t-1)^2} dt = [-\frac{2}{t-1}]_0^x = -\frac{2}{x-1} + \frac{2}{0-1} = -\frac{2}{x-1} - 2$$

$$G(x) = \int_{-1}^x \frac{2e^t}{(e^t-1)^2} dt == [\frac{2}{e^t-1}]_{-1}^x = \frac{2}{e^x-1} - \frac{2}{e^{-1}-1}$$

Problèmes

Problème 1 :

1. $f(x) = (x-1)e^{x+1}$
   a. On cherche la valeur de $\int_{-1}^{1}(x-1)e^{x+1}dx$

$$\int_{-1}^{1} (x-1)e^{x+1}dx = \int_{-1}^{1} xe^{x+1}dx - \int_{-1}^{1} e^{x+1}dx$$

D'une part, (intégration par parties)

$$\int_{-1}^{1} xe^{x+1}dx = [xe^{x+1}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{x+1}dx = e^2 + 1 - [e^{x+1}]_{-1}^{1} = e^2 + 1 - e^2 + 1 = 2$$

D'autre part,

$$\int_{-1}^{1} e^{x+1}dx = [e^{x+1}]_{-1}^{1} = e^2 - 1$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} (x-1)e^{x+1}dx = 2 - e^2 + 1 = 3 - e^2$$

   b. Le résultat trouvé précédemment est exprimée en unités d'aires. Si l'unité choisie est $2cm$, alors une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4cm^2$
   Ainsi l'aire recherchée est $(3 - e^2) \times 4 = 12 - 4e^2 cm^2$

2. $f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}$
   a. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1} = 0$
   On en déduit que y est bien asymptote oblique à la courbe de f
   b. Il s'agit d'une aire entre deux courbes : on calcule ainsi

$$\int_{-1}^{2}(x-1)e^{x+1}dx=$$

Problème 2 :

1. Ces deux intégrales existent car sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$, $\sin x+\cos x\neq 0$
2. On a

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,dx=\frac{\pi}{6}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=[-\ln(\sin x+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\ln(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})+\ln(0+1)=-\ln(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

3. En résolvant un petit système, on en déduit que

$$I=\frac{\frac{\pi}{6}-\ln(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}$$

$$J=\frac{\frac{\pi}{6}+\ln(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}$$

Problème 3 :

1.

$$I_1=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=[\ln(e^x+1)]_0^1=\ln(e+1)-\ln 2$$

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx+\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+1}dx=1$$

On en déduit que $I_0=1-I_1=1-\ln(e+1)+\ln 2$

2.

$$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx+\int_0^1\frac{e^{nx}}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_0^1 e^{nx}dx=[\frac{e^{nx}}{n}]_0^1$$

$$=\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}$$

3.

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx-\int_0^1\frac{e^{nx}}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^{nx}(e^x-1)}{e^x+1}dx>0$$

Car $e^x - 1 > 0$ sur l'intervalle $[0\,,1]$

On en déduit que la suite (I_n) est croissante

4.

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1 \Leftrightarrow e^0 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^1 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^0+1} \geq \frac{1}{e^x+1} \geq \frac{1}{e^1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{e^x+1} \geq \frac{1}{e+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1}dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}e^{nx}dx \Leftrightarrow \frac{1}{e+1}\left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}\right) \leq I_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

5.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e+1}\left(\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} I_n = +\infty$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}\right) = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{I_n}{e^n} = +\infty$$