Corrigés des exercices

Fonction carré

<u>Exercice 1</u> :

$(-2)^2 = 4$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2$$
$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$9^2 = 81$

$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9 \times 3 = 27$$

<u>Exercice 2 :</u>

$x^2 = -2$ n'a pas de solutions car un carré est toujours positif ou nul.

Donc -2 n'a pas d'antécédent par la fonction carré.

$x^2 = 4$ a deux solutions : -2 et 2.

Donc -2 et 2 sont les antécédents de 4 par la fonction carré.

$x^2 = \frac{9}{16}$ a deux solutions : $\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}$.

Donc $\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}$ sont les antécédents de $\frac{9}{16}$ par la fonction carré.

<u>Exercice 3 :</u>

1. On a : $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ \text{ou} \\ x \geq 2 \end{cases}$

$$S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

2. On a : $3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = -1$

Impossible car un carré est toujours positif ou nul donc :

$$S = \emptyset$$

3. On a : $x^2 = -3$

Impossible car un carré est toujours positif ou nul donc :

$$S = \emptyset$$

4. On a : $x^2 - 5 < -4 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{ou} \\ x > -1 \end{cases}$

$$S =]-1; 1[$$

5. On a : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$S = \{0\}$$

6. On a : $(x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x + 2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} - 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}$

$$S = \{\sqrt{3} - 2; -\sqrt{3} + 2\}$$

Exercice 4 :

$$3^2 < 4^2$$

car $3 < 4$ et comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, les images conservent le même ordre.

$$0{,}1^2 < 0{,}2^2$$

car $0{,}1 < 0{,}2$ et comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, les images conservent le même ordre.

$$(-2)^2 < (-3)^2$$

car $-3 < -2$ et comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, on inverse l'ordre des images.

$$(-5)^2 < (-9)^2$$

car $-9 < -5$ et comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, on inverse l'ordre des images.

Exercice 5 :

Pour tout x, on a $x + 4 > x + 3$. De plus, puisque $x \geq 0$ et que l'on sait que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, appliquer le carré à une inéquation dans ces conditions ne change pas le sens de son signe.
Dès lors on a $(x+4)^2 \geq (x+3)^2$

Pour tout x, on a $x - 2 > x - 3$. De plus, puisque $x \leq 0$ et que l'on sait que la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, appliquer le carré à une inéquation dans ces conditions change le sens de son signe.
Dès lors on a $(x-2)^2 \leq (x-3)^2$

Exercice 6 :

$2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 2^2 \leq x^2 \leq 3^2 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9$ car x est strictement positif sur cet intervalle
$-3 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow (-3)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2 \Leftrightarrow 9 \geq x^2 \geq 1$ car x est strictement négatif

Il faut dans le dernier cas séparer l'intervalle en deux parties : l'une positive l'autre négative
Quand $-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow (-2)^2 \geq x^2 \geq 0^2 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \geq 0$ car x est strictement négatif
Quand $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$ car x est strictement positif
En conclusion $-2 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$

Exercice 7 :

Posons $a, b \in [2\,;\ 15]$ tels que $a < b$. On a $a^2 < b^2$ et donc $3a^2 < 3b^2 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,; 15]$

Posons $a, b \in [-1\,; +\infty]$ tels que $a < b$. On a $a + 1 < b + 1$. Notons que $a + 1$ est nécessairement positif ou nul puisque a vaut au minimum -1.
Ainsi $(a+1)^2 < (b+1)^2 \Leftrightarrow -2(a+1)^2 > -2(b+1)^2 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,; +\infty]$

Dans le dernier cas il va falloir étudier les variations sur deux intervalles : celui où $x - 2 < 0$ et celui ou $x - 2 > 0$.
Posons $a, b \in [-\infty\,; 2]$ tels que $a < b$. On a $a - 2 < b - 2$. Notons que $b - 2$ est nécessairement négatif ou nul puisque b vaut au maximum 2.
Ainsi $(a-2)^2 > (b-2)^2 \Leftrightarrow -4(a-2)^2 < -4(b-2)^2 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$. On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[-\infty\,; 2]$
Posons $a, b \in [2\,; +\infty]$ tels que $a < b$. On a $a - 2 < b - 2$. Notons que $a - 2$ est nécessairement positif ou nul puisque a vaut au minimum 2.
Ainsi $(a-2)^2 < (b-2)^2 \Leftrightarrow -4(a-2)^2 > -4(b-2)^2 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$. On en déduit que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,; +\infty]$

Exercice 8 :

- a. $f(x) - f(2) = (x-2)^2 + 5 - ((2-2)^2 + 5) = (x-2)^2 + 5 - 5 = (x-2)^2$
  b. $f(x) - 5 = (x-2)^2$ et un carré est toujours positif ou nul donc $f(x) - 5 \geq 0$
  c. Le minimum d'un carré est toujours 0 : il est atteint pour $x = 2$

- a. D'une part, $2(x+1)(x+4) = 2(x^2 + 4x + x + 4) = 2(x^2 + 5x + 4) = 2x^2 + 10x + 8$
  D'autre part, $2(x + \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{2} = 2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{9}{2} = 2x^2 + 10x - \frac{9}{2} + \frac{25}{2} = 2x^2 + 10x + \frac{16}{2} = 2x^2 + 10x + 8$
  On constate que l'on a bien $f(x) = 2(x + \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{2}$

f admet donc un minimum : $-\frac{9}{2}$, atteint pour $x = -\frac{5}{2}$

b. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+4) \geq 0$ d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(x+1)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Ainsi, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,; -4\,] \cup [-1\,;\,+\infty[$

Fonction inverse

Exercice 1 :

$$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

$$\frac{1}{9} \qquad \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Exercice 2 :

$$\frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Donc $-{}^{1}/_{2}$ est un antécédent de -2 par la fonction inverse.

$$\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Donc ${}^{1}/_{4}$ est un antécédent de 4 par la fonction inverse.

$$\frac{1}{x} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}$$

Donc ${}^{16}/_{9}$ est un antécédent de ${}^{9}/_{16}$ par la fonction inverse.

$$\frac{1}{x} = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$$

Donc ${}^{1}/_{9}$ est un antécédent de 9 par la fonction inverse.

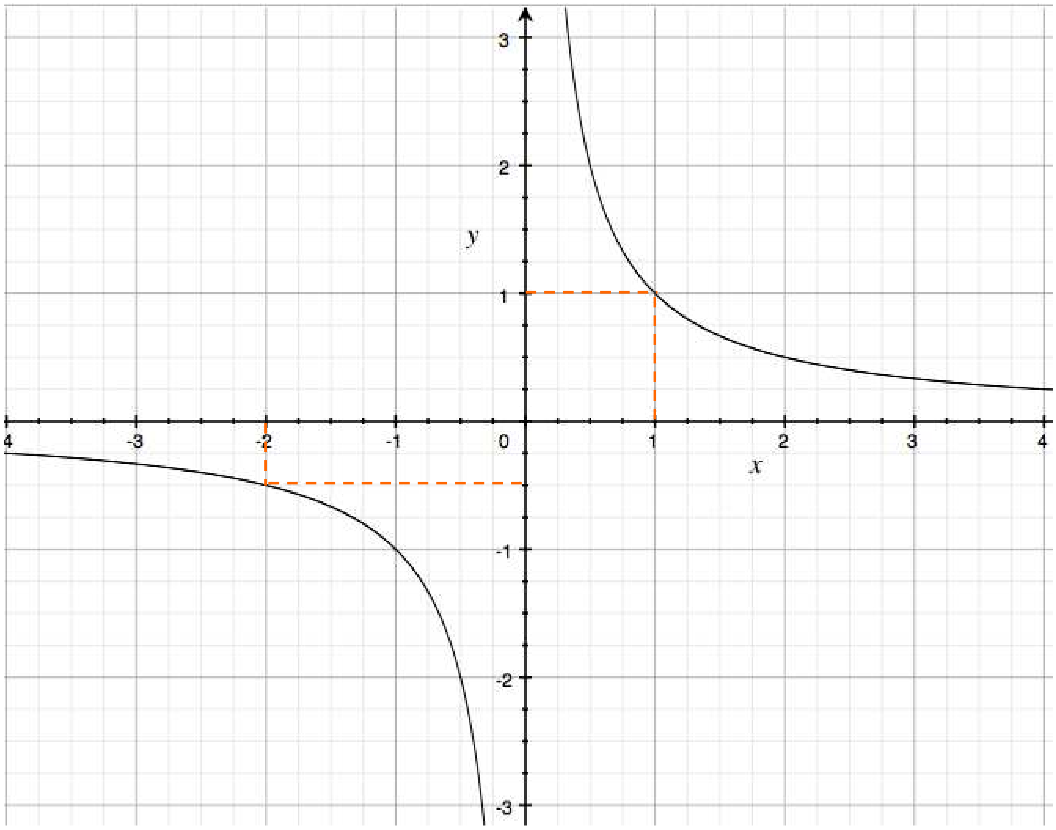
Exercice 3 :

7. Encadrement de la fonction inverse

$1 \leq x \leq 4$	$-2 < x \leq -1$
Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, les images sont inversées, on a : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq 1$	Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, les images sont inversées, on a : $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$

8. Comme la fonction inverse est une fonction strictement décroissante sur $[3; 6]$, elle admet son maximum en 3 et il vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 4 :



L'image de -2 par la fonction inverse est $-\frac{1}{2}$ et l'image de 1 par la fonction inverse est 1.

On en déduit que l'encadrement de la fonction inverse sur $]-2; 0[\cup]0; 1]$ est :

$$\left]-\frac{1}{2}; 0\right[\cup]0; 1]$$

<u>Exercice 5 :</u>

$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$5-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}$

$(5x-1)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow 5x-1 \neq 0$ et $x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{5}$ et $x \neq 4$

$x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$

$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$x^2-3 \neq 0$ et $x(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{3}$ et $x \neq -\sqrt{3}$ et $x \neq 0$ et $x \neq 2$

<u>Exercice 6 :</u>

Les valeurs interdites sont $\{-2\,;0\}$

$$\frac{4}{3x}-\frac{2x-4}{x+2}=\frac{4x+2-3x(2x-4)}{3x(x+2)}=\frac{4x+2-6x^2+12x}{3x(x+2)}=\frac{-6x^2+16x+2}{3x(x+2)}$$

Les valeurs interdites sont $\{-1\,;0\,;2\}$

$$\frac{2}{x}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{3x}{x-2}=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)x(x-2)-3x(x+1)x}{x(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{2(x^2-2+x-2x)-x(x^2-2x+x-2)-3x^2(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{2x^2-4+2x-4x-x^3+2x^2-x^2+2x-3x^3-3x^2}{x(x+1)(x-2)}=\frac{-4x^3+x^2-4}{x(x+1)(x-2)}$$

Fonctions homographiques

<u>Exercice 1</u> :

1. Pour que la fonction existe il faut que son dénominateur soit différent de 0.

$$+1 \neq 0 \Leftrightarrow \neq -1$$

Donc :

$$=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[= \setminus \{-1\}$$

2. <u>Intersection avec l'axe des :</u>

$$() = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2}{+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2=0 \\ +1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} =1 \\ \neq -1 \end{cases}$$

Le point d'intersection entre le courbe représentative de et l'axe des est donc $(1;0)$.

<u>Intersection avec l'axe des :</u>

$$(0) = \frac{2\times 0-2}{0+1} = -2$$

Le point d'intersection entre le courbe représentative de et l'axe des est donc $(0;-2)$.

3. On doit partir de la forme à obtenir :

$$2-\frac{4}{+1}=\frac{2(+1)-4}{+1}=\frac{2+2-4}{+1}=\frac{2-2}{+1}=()$$

Exercice 2 :

1. On résout $()=0$

$$()=0\Leftrightarrow\frac{2+1}{+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2+1=0\\ \neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}=-\frac{1}{2}\\ \neq -1\end{cases}$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

2. On résout $()=4$

$$()=4\Leftrightarrow\frac{2+1}{+1}=4\Leftrightarrow\frac{2+1}{+1}-4=0\Leftrightarrow\frac{2+1-4(+1)}{+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2+1-4-4}{+1}=0\Leftrightarrow\frac{-2-3}{+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}-2-3=0\\ \neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}=-\frac{3}{2}\\ \neq -1\end{cases}\qquad=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

3. On résout $()=2+1$

$$()=2+1\Leftrightarrow\frac{2+1}{+1}=2+1\Leftrightarrow\frac{2+1}{+1}-(2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2+1-(2+1)(+1)}{+1}=0\Leftrightarrow\frac{2+1-(2^2+2+\ +1)}{+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2+1-2^2-3-1}{+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}-2^2-\ =0\\ \neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-2-1)=0\\ \neq -1\end{cases}$$

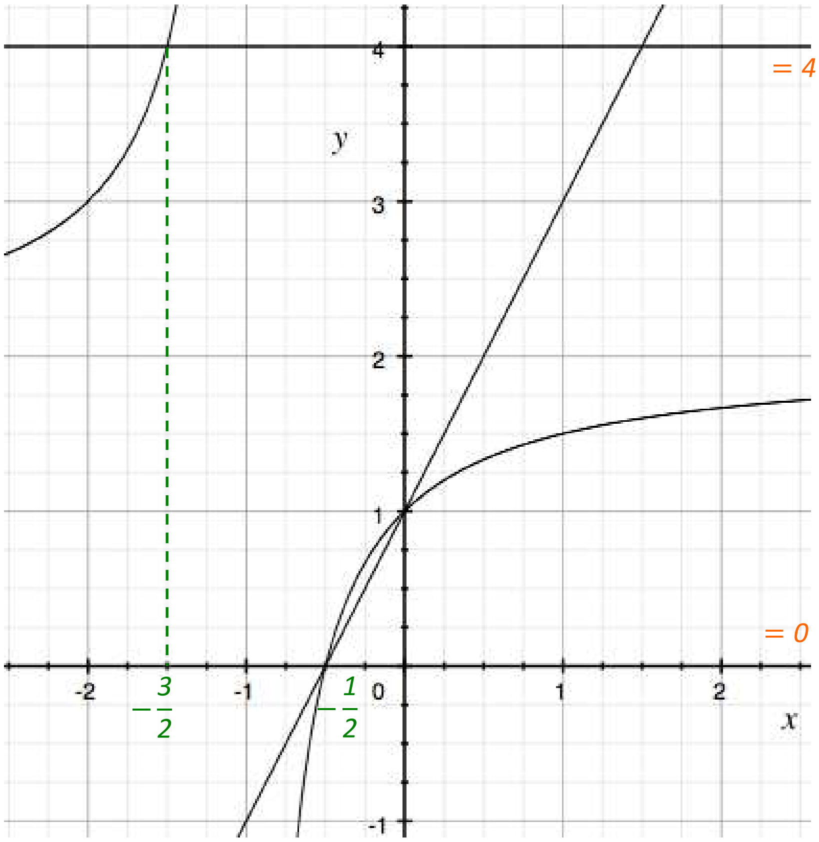
$$\Leftrightarrow\begin{cases}=0\qquad -2-1=0\\ \neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}=0\qquad =-\frac{1}{2}\\ \neq -1\end{cases}$$

$$=\left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$$

4.

$$=2+1$$

En lisant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de avec chacune des droites, on retrouve les résultats ci-dessus



Exercice 3 :

1. On doit partir de la forme à obtenir :

$$1+\frac{1}{-1}=\frac{-1+1}{-1}=\frac{\quad}{-1}={\color{red}()}$$

2. Il faut procéder en reconstruisant la fonction.

$\forall,\ \in\ ]1;+\infty[$, on a :

$<\ \Leftrightarrow\ -1<\ -1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{-1}>\frac{1}{-1}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur$]1;+\infty[$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{-1}>1+\frac{1}{-1}$

$\Leftrightarrow () > ()$

Le sens de l'inégalité a changé, la fonction est donc strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Exercice 4 :

1. Pour que la fonction existe il faut que son dénominateur soit différent de 0.

$$2+4\neq 0 \Leftrightarrow\ \neq -2$$

Donc :

$$=]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[= \ \backslash \{-2\}$$

2. On résout $() = 3$

$$() = 3 \Leftrightarrow \frac{4+7}{2+4} = 3 \Leftrightarrow \frac{4+7}{2+4} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{4+7-3(2+4)}{2+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+7-6-12}{2+4} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2-5}{2+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2-5=0 \\ \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = -\frac{5}{2} \\ \neq -2 \end{cases}$$

$$= \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

<u>Exercice 5 :</u>

$$() = \frac{-4}{6-9}$$

La fonction est de la forme :

$$() = \frac{+}{+} \ ; \neq 0 ; \ - \ \neq 0$$

Donc est une fonction homographique.

$$() = \frac{^2 - 5}{2+1}$$

La fonction n'est pas de la forme

$$() = \frac{+}{+} \ ; \neq 0 \ ; \ - \ \neq 0$$

Donc n'est pas une fonction homographique.

$$() = 1 + \frac{3}{-4} \Leftrightarrow () = \frac{-4+3}{-4} \Leftrightarrow () = \frac{-1}{-4}$$

La fonction est de la forme :

$$() = \frac{+}{+} \ ; \neq 0 ; \ - \ \neq 0$$

Donc est une fonction homographique.

$$() = \frac{2-7}{3+8}$$

La fonction est de la forme :

$$() = \frac{+}{+} \ ; \neq 0 ; \ - \ \neq 0$$

Donc est une fonction homographique.