

Corrigés des exercices

Dresser un tableau de variations

Exercice 1 :

1. $u'(x) = x - 1$ et $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$

Et $u(1) = \frac{1}{2} - 1 - 1 = -\frac{3}{2}$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de u	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

2. Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses sont données par

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{3} \text{ et } y = 0$$

Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont données par

$$x = 0 \text{ et } y = u(0) = -1$$

Exercice 2 :

1. f est un polynôme du second degré : sa représentation graphique est donc une parabole.

- Par définition l'abscisse du sommet de cette parabole est $-\frac{b}{2a}$. Ainsi $x_0 = 2 = -\frac{b}{2a}$
- $f(3) = 1 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 1$
- $f'(3) = -2 \Leftrightarrow 6a + b = -2$

D'où le système d'équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 9a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -2 \end{cases}$$

Après résolution on obtient $a = -1$, $b = 4$ et $c = -2$

2. On donne $f(x) = -x^2 + 4x - 2$

D'où $f'(x) = -2x + 4$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$

Pour finir $f(2) = 2$

Le tableau des variations est ainsi :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	2	$-\infty$

Etudier la parité d'une fonction

Exercice 3 :

$$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{(-x)^2} = \frac{1+x^2}{x^2} = f(x) : \text{la fonction est donc paire}$$

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{1+x^2} = \frac{-2x}{1+x^2} = -f(x) : \text{la fonction est donc impaire}$$

Déterminer un axe ou un centre de symétrie

Exercice 4 :

➤ Il s'agit ici de prouver que $f(3+x) = f(3-x)$

$$\text{Or, } f(3+x) = -(3+x)^2 + 6(3+x) - 5 = -x^2 - 6x - 9 + 6x + 18 - 5 = -x^2 + 9$$

$$\text{Et, } f(3-x) = -(3-x)^2 + 6(3-x) - 5 = -x^2 + 6x - 9 - 6x + 18 - 5 = -x^2 + 9$$

On en déduit que la droite $x = 3$ bien un axe de symétrie de f

➤ On va établir que $\frac{f(2+x)+f(2-x)}{2} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(2+x)+f(2-x)}{2} &= \frac{\frac{(2+x)-4}{(2+x)-2} + \frac{(2-x)-4}{(2-x)-2}}{2} = \frac{\frac{-2+x}{x} + \frac{-2-x}{-x}}{2} = \frac{\frac{-2+x+2+x}{x}}{2} = \frac{\frac{2x}{x}}{2} \\ &= \frac{2x}{x} \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que le point de coordonnées $(2, 1)$ est centre de symétrie de f .

Exercice 5:

$$g(-2+h) = \frac{3}{(-2+h)^2 + 4(-2+h) + 5} = \frac{3}{4-4h+h^2-8+4h+5} = \frac{3}{h^2+1}$$

$$g(-2-h) = \frac{3}{(-2-h)^2 + 4(-2-h) + 5} = \frac{3}{4+4h+h^2-8-4h+5} = \frac{3}{h^2+1}$$

Ainsi $g(-2+h) = g(-2-h)$ et l'on en déduit que la droite d'équation $x = -2$ est bien axe de symétrie de la courbe de la fonction g

Exercice 6 :

$$\begin{aligned}\frac{v(1+h) + v(1-h)}{2} &= \frac{\frac{3(1+h)+1}{-(1+h)+1} + \frac{3(1-h)+1}{-(1-h)+1}}{2} = \frac{\frac{4+3h}{-h} + \frac{4-3h}{h}}{2} = \frac{\frac{-4-3h+4-3h}{h}}{2} \\ &= \frac{\frac{-6h}{h}}{2} = -\frac{6}{2} = -3\end{aligned}$$

Ainsi le point $A(1, -3)$ est bien centre de symétrie de la courbe de la fonction v

Etudier la position relative de deux courbes

Exercice 7 :

➤ On étudie le signe de la différence des deux fonctions : $3x - 2 - (1 - 2x) = 5x - 3$

On a $5x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}$

On en déduit que :

- sur l'intervalle $]\frac{3}{5}, +\infty[$ D_1 est au dessus de D_2
- sur l'intervalle $] -\infty, \frac{3}{5}[$ D_1 est au dessous de D_2
- en $x = \frac{3}{5}$ les deux droites se coupent

➤ $f(x) - g(x) = 2x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 3x + 4) = x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 16 > 0$ d'où deux racines : -3 et 1 . On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit que :

- sur l'intervalle $] -\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ la courbe de f est au dessus de celle de g
- sur l'intervalle $] -3, 1[$ la courbe de f est au dessous de celle de g
- en $x = -3$ et en $x = 1$ les deux courbes se coupent

Etudier une fonction

Problème 1 :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ (aux abords de 1 le numérateur est négatif et à gauche de 1 le dénominateur est négatif donc le signe de l'ensemble est positif)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ (aux abords de 1 le numérateur est négatif et à droite de 1 le dénominateur est positif donc le signe de l'ensemble est négatif)

Ces deux résultats signifient que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote **verticale** d'équation $x = 1$

$$2. \text{ a) } f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+bx-ax-b+c}{x-1}$$

d'où $ax^2 + bx - ax - b + c = x^2 + 2x - 4$ et donc par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ -b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 - \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 - \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{Posons } y = x + 3. \text{ On a } f(x) - y = -\frac{1}{x-1}. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x-1} = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à \mathcal{C} en $+$ et $-\infty$

$$\text{c) } f(x) - y = -\frac{1}{x-1}$$

Ainsi $f(x) - y > 0$ si $x \in]-\infty, 1[$ et donc \mathcal{C} est au dessus de Δ sur cet intervalle

$f(x) - y < 0$ si $x \in]1, +\infty[$ et donc \mathcal{C} est au dessous de Δ sur cet intervalle

De plus, \mathcal{C} et Δ se coupent en $x = 1$

3. La dérivée de f est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x-1) - (x^2+2x-4) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$


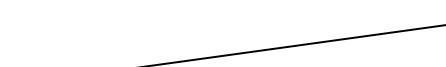
Le polynôme $x^2 - 2x + 2$ n'a pas de racine ($\Delta = -4 < 0$) donc il est de signe constant : celui de a . Il est donc positif sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

De plus $(x-1)^2$ est toujours positif.

Donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ 	$+\infty$	$-\infty$ 

Problème 2 :

1. Donner son ensemble de définition.

Il faut que $x^2 - 5x + 6 \neq 0$.

On résout $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{2} = 3 \end{cases}$$

On obtient :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$$

2. Etudier la parité de f .

$$f(-x) = \frac{-x - 1}{(-x)^2 + 5x + 6} = \frac{-x - 1}{x^2 + 5x + 6} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

Donc f est ni paire, ni impaire.

3. Calculer la dérivée de f .

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u = x - 1; & u' = 1 \\ v = x^2 - 5x + 6; & v' = 2x - 5 \end{cases}$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 6 - (x - 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} = \dots = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

4. Donner le signe de f' .

- $(x^2 - 5x + 6)^2 \geq 0$ car c'est un carré
- Le signe de f' dépend donc du signe de son numérateur $-x^2 + 2x + 1$.

On résout $-x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{-2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

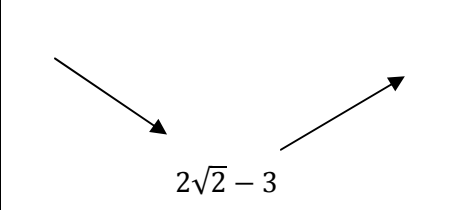
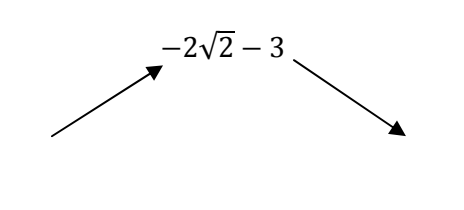
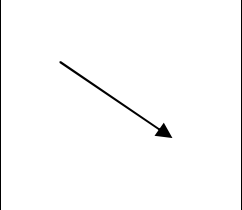
x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	2	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-

5. En déduire le sens de variations de f .

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 3[\cup]3; +\infty[$

f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 - \sqrt{2}; 2[\cup]2; 1 + \sqrt{2}]$

6. Construire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	2	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

7. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ x < 2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} x - 1 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x > 2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} x - 1 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^2 - 5x + 6 = 0^- \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3^- \\ x < 3}} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} x - 1 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} x^2 - 5x + 6 = 0^- \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} x - 1 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

On peut donc compléter le tableau de variations en mettant les limites à chaque valeurs interdites et pour les infinis.

8. Donner les équations des éventuelles asymptotes.

Il y a deux asymptotes verticales d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Il y a une asymptote horizontale : $y = 0$.

9. Donner les équations de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 1$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- $f'(1) = \frac{1}{2}$
- $f(1) = 0$

Donc

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$