Corrigés des exercices

Dresser un tableau de variations

Exercice 1 :

1. $u'(x) = x - 1$ et $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Par ailleurs, $\lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$

Et $u(1) = \frac{1}{2} - 1 - 1 = -\frac{3}{2}$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de u	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses sont données par $u(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$ et $y = 0$
   Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont données par $x = 0$ et $y = u(0) = -1$

Exercice 2 :

1. f est un polynôme du second degré : sa représentation graphique est donc une parabole.
   - Par définition l'abscisse du sommet de cette parabole est $-\frac{b}{2a}$. Ainsi $x_0 = 2 = -\frac{b}{2a}$
   - $f(3) = 1 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 1$
   - $f'(3) = -2 \Leftrightarrow 6a + b = -2$

   D'où le système d'équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 9a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -2 \end{cases}$$

   Après résolution on obtient $a = -1$, $b = 4$ et $c = -2$

2. On donne $f(x) = -x^2 + 4x - 2$
   D'où $f'(x) = -2x + 4$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Par ailleurs, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$
   Pour finir $f(2) = 2$
   Le tableau des variations est ainsi :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Etudier la parité d'une fonction

Exercice 3 :

$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{(-x)^2} = \frac{1+x^2}{x^2} = f(x)$: la fonction est donc paire

$f(-x) = \frac{2(-x)}{1+x^2} = \frac{-2x}{1+x^2} = -f(x)$: la fonction est donc impaire

Déterminer un axe ou un centre de symétrie

Exercice 4 :

- Il s'agit ici de prouver que $f(3+x) = f(3-x)$
  Or, $f(3+x) = -(3+x)^2 + 6(3+x) - 5 = -x^2 - 6x - 9 + 6x + 18 - 5 = -x^2 + 9$
  Et, $f(x-3) = -(3-x)^2 + 6(3-x) - 5 = -x^2 + 6x - 9 - 6x + 18 - 5 = -x^2 + 9$
  On en déduit que la droite $x = 3$ bien un axe de symétrie de f

- On va établir que $\frac{f(2+x)+f(2-x)}{2} = 1$

$$\frac{f(2+x)+f(2-x)}{2} = \frac{\frac{(2+x)-4}{(2+x)-2} + \frac{(2-x)-4}{(2-x)-2}}{2} = \frac{\frac{-2+x}{x} + \frac{-2-x}{-x}}{2} = \frac{\frac{-2+x+2+x}{x}}{2} = \frac{\frac{2x}{x}}{2}$$
$$= \frac{2x}{x} \times \frac{1}{2} = 1$$

Ce qui prouve que le point de coordonnées $(2\,,1)$ est centre de symétrie de f.

Exercice 5:

$$g(-2+h) = \frac{3}{(-2+h)^2 + 4(-2+h) + 5} = \frac{3}{4 - 4h + h^2 - 8 + 4h + 5} = \frac{3}{h^2+1}$$

$$g(-2-h) = \frac{3}{(-2-h)^2 + 4(-2-h) + 5} = \frac{3}{4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5} = \frac{3}{h^2+1}$$

Ainsi $g(-2+h) = g(-2-h)$ et l'on en déduit que la droite d'équation $x = -2$ est bien axe de symétrie de la courbe de la fonction g

Exercice 6 :

$$\frac{v(1+h)+v(1-h)}{2}=\frac{\frac{3(1+h)+1}{-(1+h)+1}+\frac{3(1-h)+1}{-(1-h)+1}}{2}=\frac{\frac{4+3h}{-h}+\frac{4-3h}{h}}{2}=\frac{\frac{-4-3h+4-3h}{h}}{2}$$

$$=\frac{\frac{-6h}{h}}{2}=-\frac{6}{2}=-3$$

Ainsi le point $A\ (1\ ,-3\ )$ est bien centre de symétrie de la courbe de la fonction v

Etudier la position relative de deux courbes

Exercice 7 :

- On étudie le signe de la différence des deux fonctions : $3x-2-(1-2x)=5x-3$
  On a $5x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{5}$
  On en déduit que :
  - sur l'intervalle $]\frac{3}{5}\ ,+\infty[$ D_1 est au dessus de D_2
  - sur l'intervalle $]-\infty\ ,\frac{3}{5}[$ D_1 est au dessous de D_2
  - en $x=\frac{3}{5}$ les deux droites se coupent

- $f(x)-g(x)=2x^2+5x+1-(x^2+3x+4)=x^2+2x-3$
  $\Delta=16>0$ d'où deux racines : -3 et 1. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que :
- sur l'intervalle $]-\infty\ ,-3[\ \cup\ ]1\ ,+\infty[$ la courbe de f est au est au dessus de celle de g
- sur l'intervalle $]-3\ ,1[$ la courbe de f est au dessous de celle de g
- en $x=-3$ et en $x=1$ les deux courbes se coupent

Etudier une fonction

Problème 1 :

1. $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$ (aux abords de 1 le numérateur est négatif et à gauche de 1 le dénominateur est négatif donc le signe de l'ensemble est positif)
   $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$ (aux abords de 1 le numérateur est négatif et à droite de 1 le dénominateur est positif donc le signe de l'ensemble est négatif)
   Ces deux résultats signifient que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

2. a) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+bx-ax-b+c}{x-1}$

d'où $ax^2 + bx - ax - b + c = x^2 + 2x - 4$ et donc par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ -b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 3 - \frac{1}{x-1} = -\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 3 - \frac{1}{x-1} = +\infty$

Posons $y = x + 3$. On a $f(x) - y = -\frac{1}{x-1}$. Or $\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x-1} = 0$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+$ et $-\infty$

c) $f(x) - y = -\frac{1}{x-1}$

Ainsi $f(x) - y > 0$ si $x \in]-\infty, 1[$ et donc $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ sur cet intervalle

$f(x) - y < 0$ si $x \in]1, +\infty[$ et donc $\mathcal{C}$ est au dessous de Δ sur cet intervalle

De plus, $\mathcal{C}$ et Δ se coupent en $x = 1$

3. La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1) - (x^2+2x-4) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$$

Le polynôme $x^2 - 2x + 2$ n'a pas de racine ($\Delta = -4 < 0$) donc il est de signe constant : celui de a. Il est donc positif sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

De plus $(x-1)^2$ est toujours positif.

Donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Problème 2</u> :

1. **<u>Donner son ensemble de définition.</u>**

Il faut que $x^2 - 5x + 6 \neq 0$.

On résout $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$$

On obtient :

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{2;3\}$$

2. Etudier la parité de f.

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2+5x+6} = \frac{-x-1}{x^2+5x+6} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

Donc f est ni paire, ni impaire.

3. Calculer la dérivée de f.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u = x-1; \quad & u' = 1 \\ v = x^2-5x+6; \quad & v' = 2x-5 \end{cases}$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{x^2-5x+6-(x-1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} = \cdots = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2-5x+6)^2}$$

4. Donner le signe de f'.

- $(x^2-5x+6)^2 \geq 0$ car c'est un carré
- Le signe de f' dépend donc du signe de son numérateur $-x^2+2x+1$.

On résout $-x^2+2x+1=0$

$$\Delta = b^2-4ac = (2)^2-4\times(-1)\times 1 = 4+4 = 8 > 0$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{-2} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{-2} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

5. **En déduire le sens de variations de f.**

f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;\ 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\ 1-\sqrt{2}; 2\right[\cup \left]2; 1+\sqrt{2}\right]$

6. **Construire le tableau de variations de f.**

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}-3$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

7. **Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{x\to2} x-1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x^2-5x+6 = 0^+ \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{x\to2} x-1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-5x+6 = 0^- \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or}\begin{cases}\lim\limits_{x\to3} x-1=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x^2-5x+6=0^-\end{cases}\text{donc}\ \lim_{\substack{x\to3\\x<3}}\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Or}\begin{cases}\lim\limits_{x\to3} x-1=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x^2-5x+6=0^+\end{cases}\text{donc}\ \lim_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

On peut donc compléter le tableau de variations en mettant les limites à chaque valeurs interdites et pour les infinis.

8. Donner les équations des éventuelles asymptotes.

Il y a deux asymptotes verticales d'équation $x=2$ et $x=3$.
Il y a une asymptote horizontale : $y=0$.

9. Donner les équations de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0=1$.

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

- $f'(1)=\frac{1}{2}$
- $f(1)=0$

Donc

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+0=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$