Corrigés des exercices

Calculer un nombre dérivé en un point

Exercice 1 :

Le coefficient directeur de cette tangente est donné par $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{5-3} = \frac{3}{2}$

On en déduit que $f'(a) = \frac{3}{2}$

Exercice 2 :

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h)^2 - 3(2+h) - 5 - (2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 5)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(4 + 4h + h^2) - (6 + 3h) - 5 + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 5 + 2h = 5$$

Ainsi $f'(2) = 5$

Exercice 3 :

1. On a :

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(-2+h)+1}{(-2+h)-1} - \frac{2 \times -2 + 1}{-2-1}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4+2h+1}{-3+h} - \frac{-3}{-3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-3+2h-(-3+h)}{-3+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-3+2h-(-3+h)}{-3+h}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{-3+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-3+h} = -\frac{1}{3}$$

Ainsi f est dérivable en -2 et $f'(2) = -\frac{1}{3}$

2. La fonction f n'est pas définie en 1 : elle n'est donc pas dérivable en 1.
   D'autre part, la fonction $2x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
   La fonction $x - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
   Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Exercice 4 :

1. Appliquons la définition

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ existe donc la fonction f est dérivable en 3 et $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2. Appliquons la définition

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'existe pas (ce n'est pas un réel) donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Etudier la dérivabilité en un point et sur un ensemble

Exercice 5 :

- Tout d'abord,

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Il faut ensuite distinguer deux cas :

Si $h>0$: $|h|=h$ et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Si $h<0$: $|h|=-h$ et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

Il n'existe donc pas de limite unique en 0 : la fonction $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

- Pour x^2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Ainsi $f'(x) = 2x$

Pour $\sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ainsi $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 6 :

- La fonction $x \to x-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
  La fonction $x \to x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
  On en déduit que la fonction $x \to \frac{x-3}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
  La fonction f n'est pas définie en 1 donc pas continue en ce point : on en déduit qu'elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$
  A retenir : f dérivable $\Rightarrow$ f continue et f non continue $\Rightarrow$ f non dérivable

- On a $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{2x-1} = \sqrt{2\times\frac{1}{2}-1} = \sqrt{0} = 0$ donc la fonction g est continue en $\frac{1}{2}$
  Par ailleurs, $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+h\right)-1}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}} = +\infty$
  La limite n'est pas finie, donc la fonction g n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$

- On doit avoir $\lim_{h\to 0} h(x) = 1$
  Or $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\sqrt{2a+x+3} = \sqrt{2a+3}$ et $\sqrt{2a+3} = 1 \Leftrightarrow 2a+3 = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{2} = -1$
  On doit donc poser $a = -1$

Calculer une fonction dérivée

Exercice 7 :

$$f_1'(x) = 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + 3 = 3x^2 - 2x + 3$$

$$f_2'(x) = \frac{2 \times (2x-1) - 2x \times (x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{4x - 2 - (2x^3 - 2x^2 + 2x)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f_3'(x) = 3(6 - 2x) + (3x + 1) \times (-2) = 18 - 6x - 6x - 2 = -12x + 16$$

$$f_4'(x) = 3 \times 5 \times (5x + 1)^2 = 15(5x + 1)^2$$

$$f_5'(x) = -(-2) \times \sin(1 - 2x) = 2\sin(1 - 2x)$$

$$f_6'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2 - 3x}}$$

Exercice 8 :

- $f'(x) = 2x(3x - 5) + (x^2 + 1) \times 3 = 6x^2 - 10x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 10x + 3$
- La dérivée de g est :

$$g'(x) = \frac{(2x - 5)(x^2 + x - 2) - (x^2 - 5x)(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$$
$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5x + 10 - 2x^3 - x^2 + 10x^2 + 5x}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 4x + 10}{(x^2 + x - 2)^2}$$

- La dérivée de h est :

$$h'(x) = 2 \times \left(\frac{5(-x + 2) - (5x + 1) \times (-1)}{(-x + 2)^2}\right) \times \frac{5x + 1}{-x + 2} = 2 \times \frac{(-5x + 10 + 5x + 1)(5x + 1)}{(-x + 2)^3}$$
$$= 2 \times \frac{11 \times (5x + 1)}{(-x + 2)^3} = \frac{22(5x + 1)}{(-x + 2)^3}$$

Déterminer l'équation d'une tangente

Exercice 9 :

1. On a $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$ d'où l'équation de la tangente qui suit :
   $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = (3 \times 1^2 - 2 \times 1 - 3)(x - 1) + (1^3 - 1^2 - 3 \times 1 - 1) =$
   $-2(x - 1) - 4 = -2x + 2 - 4 = -2x - 2$
2. Pour qu'une droite soit parallèle à T, il faut que son coefficient directeur soit le même que celui de T, c'est-à-dire -2. De plus, par définition le coefficient directeur de la courbe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse est $f'(a)$. Donc en supposant que a soit l'abscisse du point que l'on recherche, on doit avoir l'égalité $f'(a) = -2$.

Ainsi $f'(a) = -2 \Leftrightarrow 3a^2 - 2a - 3 = -2 \Leftrightarrow 3a^2 - 2a - 1 = 0$
Ici $\Delta = 16 > 0$ d'où deux solutions : $b_1 = 1$ ou $b_2 = -\frac{1}{3}$
Puisque l'abscisse 1 correspond à celle de la première question, il n'existe qu'un seul autre point ou la tangente est parallèle à T : il s'agit du point de coordonnées $(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right))$, c'est-à-dire de coordonnées $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27})$

Exercice 10 :

1. $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

   Or, $f(1) = 1^3 - 1^2 - 3 - 1 = -4$

   De plus $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$ donc $f'(1) = 3 - 2 - 3 = -2$

   Au final, $y = -2(x-1) - 4 = -2x + 2 - 4 = -2x - 2$

2. Soit un point d'abscisse $b \neq 1$ admettant une tangente parallèle à y.
   On sait que le coefficient directeur de cette tangente est $f'(b)$.
   De plus, pour qu'elle soit parallèle à y il faut que leurs coefficients directeurs soient égaux, donc $f'(b) = -2$.
   $$f'(b) = 3b^2 - 2b - 3 = -2 \Leftrightarrow 3b^2 - 2b - 1 = 0$$
   Cette équation admet deux solutions : $b = 1$ et $b = -\frac{1}{3}$
   Le point recherché a pour abscisse $-\frac{1}{3}$