Corrigés des exercices

Utiliser les formules de base

Exercice 1 :

$\ln\frac{6}{32} - 4\ln 2 = \ln\frac{3}{16} + 4\ln 2 = \ln 3 - \ln 16 + 4\ln 2 = \ln 3 - \ln 2^4 + 4\ln 2 = \ln 3 - 4\ln 2 + 4\ln 2$
$= \ln 3$

$7\ln e^3 + 5\ln(\frac{1}{e})^3 = 7 \times 3 + 5 \times 3\,(\ln 1 - \ln e) = 21 - 15 = 6$

Déterminer un ensemble de définition

Exercice 2 :

$$f(x) = \ln(-3x^2 + 5x - 2)$$

Etudions le signe de $-3x^2 + 5x - 2$

Il s'agit d'un polynôme du second degré : on commence donc par calculer son discriminant.

$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 25 - 24 = 1$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Puis l'on dresse son tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Puisque l'on souhaite que le contenu du logarithme soit strictement positif, on en déduit que l'ensemble de définition de f est $]\frac{2}{3}\,; 1[$

$$g(x) = \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}$$

Ici on doit déjà avoir $x > 0$ pour que $\ln x$ existe

De plus on souhaite que $\ln x - 1 \neq 0$

Or $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Ainsi l'ensemble de définition de g est $]0\,;e[\,\cup\,]e\,;\,+\infty[$

$$h(x) = \sqrt{1 + \ln x}$$

Ici on doit déjà avoir $x > 0$ pour que $\ln x$ existe

De plus on souhaite que $1 + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

Ainsi l'ensemble de définition de g est $]e^{-1}\,;\,+\infty[$

Résoudre une équation

Exercice 3 :

$$\ln x = \frac{7}{4}$$

Ensemble de définition :

$x > 0$

Ainsi l'ensemble de définition de l'équation est $]0\,;+\infty[$

Résolution de l'équation :

$$\ln x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = e^{\frac{7}{4}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{9 - x^2}\right) = -2$$

Ensemble de définition :

$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

Ainsi l'ensemble de définition de l'équation est $]-3\,;3[$

Résolution de l'équation :

$$\ln\left(\frac{1}{9 - x^2}\right) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{9 - x^2} = e^{-2} \Leftrightarrow 9 - x^2 = e^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 - e^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{9 - e^2}\ ou\ x = -\sqrt{9 - e^2}$$

$$\ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2$$

Ensemble de définition :

$x > 0$ et $x > 3$

Ainsi l'ensemble de définition de l'équation est $]3\,;+\infty[$

Résolution de l'équation :

$\ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x(x-3) = \ln 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$

Or $-1 \notin]3\,;+\infty[$ donc l'unique solution $x = 4$

Exercice 4 :

$$\ln(x+2) = \ln(8-2x)$$

Ensemble de définition :

$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$8 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 4$

Ainsi l'ensemble de définition de l'équation est $]-2\,;4[$

Résolution de l'équation :

$\ln(x+2) = \ln(8-2x) \Leftrightarrow x + 2 = 8 - 2x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

La solution appartient bien à l'ensemble de définition : on en conclut que $S = \{2\}$

$$\ln(2x+1) + \ln(x-1) = \ln 2$$

Ensemble de définition :

$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Ainsi l'ensemble de définition de l'équation est $]1\,;+\infty[$

Résolution de l'équation :

$\ln(2x+1)+\ln(x-1)=\ln 2$
$\Leftrightarrow \ln(2x+1)(x-1)$
$=\ln 2 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=2 \Leftrightarrow 2x^2+x-2x-1-2=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-3=0$

Il s'agit d'un polynôme du second degré : on commence donc par calculer son discriminant.

$\Delta= b^2-4ac=(-1)^2-4\times(2)\times(-3)=1+24=25$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 2}=\dfrac{1-5}{4}=-1 \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 2}=\dfrac{1+5}{4}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La solution $\{-1\}$ n'appartient pas à l'ensemble de définition : on en conclut que $S=\{\frac{3}{2}\}$

$$2\ln x=\ln(\frac{4x+3}{2x+5})$$

Ensemble de définition :

$x>0$ pour que $\ln x$ existe

$\frac{4x+3}{2x+5}>0$: mieux vaut faire un tableau de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	|	$-$	|	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\dfrac{4x+3}{2x+5}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Au final l'ensemble de définition de l'équation est $]0\,;\,+\infty[$

Résolution de l'équation :

$2\ln x=\ln(\frac{4x+3}{2x+5}) \Leftrightarrow \ln x^2=\ln(\frac{4x+3}{2x+5}) \Leftrightarrow x^2-\frac{4x+3}{2x+5}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+5x^2-4x-3}{2x+5}=0$

En remarquant que 1 est solution de $2x^3+5x^2-4x-3$, on peut factoriser ce polynôme à l'aide de la méthode d'identification.

Ce qui donne $2x^3+5x^2-4x-3=(x-1)(2x^2+7x+3)$

Le discriminant de $2x^2+7x+3$ est

$\Delta= b^2-4ac=(7)^2-4\times(2)\times(3)=49-24=25$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-\sqrt{25}}{2\times 2} = \dfrac{-7-5}{4} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+\sqrt{25}}{2\times 2} = \dfrac{-7+5}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sur les trois solutions trouvées, une seule appartient à l'ensemble de définition : on en conclut que $S = \{1\}$

Résoudre une inéquation

Exercice 5 :

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) \leq 0$$

Ensemble de définition :

$$\frac{2x+1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,; -\frac{1}{2}[\,\cup\,]2\,;+\infty[$$

Résolution de l'inéquation :

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x+2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-2} \leq 0$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x+3}{x-2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

En conclusion, $S =]-3\,;-\frac{1}{2}[$

$$(\ln x)^2 - 3\ln x \geq 4$$

Ensemble de définition :

$x > 0$ pour que $\ln x$ existe

Résolution de l'inéquation :

$$(\ln x)^2 - 3\ln x \geq 4 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \geq 0$$

On pose $X = \ln x$

Les racines du polynôme $X^2 - 3X - 4$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$

Les racines du polynôme $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4$ sont donc $x_1 = e^{-1}$ et $x_2 = e^4$

On en déduit le tableau de signes :

x	0		e^{-1}		e^{4}		$+\infty$
$(\ln x)^2 - 3\ln x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion, $S =]0\,;e^{-1}[\ \cup\ ]e^4\,;+\infty[$

$$(\ln x)^3 - 25\ln x \geq 0$$

Ensemble de définition :

$x > 0$ pour que $\ln x$ existe

Résolution de l'inéquation :

$(\ln x)^3 - 25\ln x \geq 0 \Leftrightarrow (\ln x)((\ln x)^2 - 25) \geq 0 \Leftrightarrow (\ln x)(\ln x - 5)(\ln x + 5) \geq 0$

x	0		e^{-5}		e^{5}		$+\infty$
$\ln x$		$+$		$+$		$+$	
$\ln x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x)^3 - 25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion, $S =]0\,;e^{-5}[\ \cup\ ]e^5\,;+\infty[$

Calculer une dérivée

Exercice 6 :

$-x^2 + 2 + \ln x$

La dérivée est

$$-2x + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 1}{x}$$

$\frac{\ln x}{x} - x$

La dérivée est

$$\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$$

$x(1 - \ln x)^2$

La dérivée est

$$1 \times (1 - \ln x)^2 + x \times 2 \times -\frac{1}{x}(1 - \ln x) = (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x) = (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2) = (1 - \ln x)(-1 - \ln x)$$

$\ln(3x + 5)$

La dérivée est

$$\frac{3}{3x + 5}$$

<u>Exercice 7</u> :

La dérivée de $xln\ x$ est :

$$\ln x + 1$$

La dérivée de $x^2 \ln(1 + x)$ est :

$$2x \ln(1 + x) + x^2 \times \frac{1}{1 + x} = \frac{2x \ln(1 + x) + 2x^2 \ln(1 + x) + x^2}{1 + x}$$

La dérivée de $\ln(\frac{2+x}{2-x})$ est :

$$\frac{\frac{2 - x + 2 + x}{(2 - x)^2}}{\frac{2 + x}{2 - x}} = \frac{4}{(2 - x)^2} \times \frac{2 - x}{2 + x} = \frac{4}{(2 - x)(2 + x)}$$

La dérivée de $e^{xln\,(1-x^2)}$ est :

$$(\ln(1 - x^2) + x \times \frac{-2x}{1 - x^2})\, e^{xln\,(1-x^2)} = (\ln(1 - x^2) - \frac{2x^2}{1 - x^2})\, e^{xln\,(1-x^2)}$$

Calculer une limite

Exercice 8 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(\frac{x-1}{x}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - e^{x} + 1 = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}})$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) = +\infty$$

Problème

1.

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - 1}{x}$$

$g'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$, son signe est négatif et donc g est strictement décroissante.
Par ailleurs, $g(1) = 0$ (solution trouvée par tatonnements : il n'est pas possible de résoudre l'équation $g(x) = 0$ à la main)
On en déduit naturellement que :
$g(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\,;1[$
$g(x) > 0$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$

2. $f'(x) = \frac{1-\ln x - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x}$
Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur, donc de $g(x)$
Ainsi f est décroissante sur l'intervalle $]0\,;1[$
Et f est croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$

3.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
Donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$
Donc $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$

4.
$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x} - x - (-x) = \frac{\ln x}{x}$$
$f(x) - y < 0$ sur l'intervalle $]0\,;1[$ donc $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{D}$
$f(x) - y < 0$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$donc $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$

5. La tangente sera parallèle à $\mathcal{D}$ si leur coefficient directeur est le même, c'est-à-dire -1
Par ailleurs, le coefficient directeur de la tangente en a est donné par $f'(a) = \frac{1-\ln a - a^2}{a^2}$
On doit donc résoudre $\frac{1-\ln a - a^2}{a^2} = -1$
$$\frac{1-\ln a - a^2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1-\ln a - a^2}{a^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln a}{a^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - \ln a = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$
L'abscisse du point A est donc e, son ordonnée est $f(e) = \frac{\ln e}{e} - e = \frac{1}{e} - e$