Corrigés des exercices

Démontrer par récurrence

Exercice 1 :

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n \geq 0$» Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   INITIALISATION :
   $U_0 = 0$ et $0 \geq 0$
   On a donc bien $U_0 > 0$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   HEREDITE :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$
   Or $U_n \geq 0$ donc $2 + U_n \geq 0$ et $\sqrt{2 + U_n} \geq 0$
   Donc $U_{n+1} \geq 0$
   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

2. Ici l'on ne vous donne pas le sens de variation de la suite : il va donc falloir le conjecturer vous-même. On a $U_0 = 0$ et $U_1 = \sqrt{2 + U_0} = \sqrt{2} > U_0$
   Donc a priori la suite semble être croissante. Démontrons le par récurrence.

   Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « (U_n) est strictement croissante» ou bien « $U_{n+1} - U_n > 0$»
   Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   INITIALISATION :
   $U_1 - U_0 = \sqrt{2} - 0 > 0$
   On a donc bien $U_1 - U_0 > 0$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   HEREDITE :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $U_{n+2} - U_{n+1} = \sqrt{2 + U_{n+1}} - \sqrt{2 + U_n}$
   $= \frac{(\sqrt{2+U_{n+1}} - \sqrt{2+U_n}) \times (\sqrt{2+U_{n+1}} + \sqrt{2+U_n})}{\sqrt{2+U_{n+1}} + \sqrt{2+U_n}} = \frac{U_{n+1} - U_n}{\sqrt{2+U_{n+1}} + \sqrt{2+U_n}}$
   Or $U_{n+1} - U_n > 0$ par hypothèse et $\sqrt{2 + U_{n+1}} + \sqrt{2 + U_n} > 0$ car une racine est toujours positive.
   Donc $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$
   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « (U_n) est une suite positive» ou bien « $U_n > 0$» Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

INITIALISATION :

$U_1 = 1 > 0$

On a donc bien $U_1 > 0$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

HEREDITE :

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n}$ et $3 + 2U_n > 0$ et $2 + U_n > 0$

Donc $U_{n+1} > 0$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

1. $U_1 = U_0 + 2 \times 0 + 1 = 1 = 1^2$
   $U_2 = U_1 + 2 \times 1 + 1 = 4 = 2^2$
   $U_3 = U_2 + 2 \times 2 + 1 = 9 = 3^2$
   $U_4 = U_3 + 2 \times 3 + 1 = 16 = 4^2$
   $U_5 = U_4 + 2 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$
2. Les premiers termes semblent être la suite composée de tous les carrés parfaits. On peut donc émettre la conjecture que $U_n = n^2$
3. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n = n^2$» Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

   INITIALISATION :

   $U_0 = 0$ et $0^2 = 0$

   On a donc bien $U_0 = 0^2$

   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   HEREDITE :

   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   $U_{n+1} = U_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

   Donc $U_{n+1} = (n + 1)^2$

   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 4 :

- Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$»

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

INITIALISATION :

$2^0 = 1$ et $0+1 = 1$ donc on a bien $2^0 \geq 0+1$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

<u>HEREDITE :</u>

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$2^n \geq n+1 \Leftrightarrow 2^n \times 2 \geq (n+1) \times 2$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n+2$

Or, $2n+2 \geq 2n+1$ donc $2^{n+1} \geq 2n+1$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$»

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>INITIALISATION :</u>

$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2\times 1 - 1) = 1$ et $1^2 = 1$ donc on a bien $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

<u>HEREDITE :</u>

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

- Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$»

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

INITIALISATION :

$(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$ donc on a bien $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

HEREDITE :

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

$\Leftrightarrow (1+x)^n \times (1+x) \geq (1+nx) \times (1+x)$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ car $x^2 \geq 0$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1 = 9a, \ \forall a \in \mathbb{Z}$»

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

INITIALISATION :

$10^1 - 1 = 9$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

HEREDITE :

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$10^n - 1 = 9a \Leftrightarrow 10^n = 9a + 1$

$\Leftrightarrow 10^n \times 10 = (9a+1) \times 10$

$\Leftrightarrow 10^{n+1} = 9a \times 10 + 10$

$\Leftrightarrow 10^{n+1} = 9a \times 10 + 9 + 1$

$\Leftrightarrow 10^{n+1} - 1 = 9a \times 10 + 9$

$\Leftrightarrow 10^{n+1} - 1 = 9(10a+1) = 9b$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

- Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n + 1$»

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

INITIALISATION :

$U_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

$U_1 = 3$ et $2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie aux rangs initiaux.

HEREDITE :

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n et un certain rang $n + 1$.

Montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

$U_n = 2^n + 1$ et $U_{n+1} = 2^{n+1} + 1$

Ainsi, $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n = U_{n+2} = 3(2^{n+1} + 1\,) - 2(2^n + 1) = 3 \times 2^{n+1} + 3 - 2 \times 2^n - 2$

$$= 3 \times 2 \times 2^n - 2 \times 2^n + 1 = 4 \times 2^n + 1 = 2^{n+2} + 1$$

Comme $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Etudier des suites adjacentes

Exercice 6 :

➢

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - 10^{-n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + 10^{-n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{10^n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + (\frac{1}{10})^n = 1$$

De plus,
$U_{n+1} - U_n = 1 - 10^{-(n+1)} - (1 - 10^{-n}) = 10^{-n} - 10^{-(n+1)}$
$= 10^{-n}(1 - 10^{-1}) = 10^{-n} \times \frac{9}{10} > 0$
donc la suite (U_n) est strictement croissante.
D’autre part,
$V_{n+1} - V_n = 1 + 10^{-(n+1)} - (1 + 10^{-n}) = -10^{-n} + 10^{-(n+1)}$
$= 10^{-n}(-1 + 10^{-1}) = 10^{-n} \times \left(-\frac{9}{10}\right) < 0$
donc la suite (V_n) est strictement décroissante.

Les suites (U_n) et (V_n) sont donc adjacentes

➢

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) + \frac{1}{n} = +\infty$$

Les suites (U_n) et (V_n) de limites infinies ne sont donc pas adjacentes (leur limite commune devant nécessairement être un nombre réel)

➢

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$$

(le théorème des gendarmes nous dit que puisque $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$)

De plus,

$$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

donc la suite (U_n) est strictement croissante.

D'autre part,

$$V_{n+1} - V_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(-\frac{1}{n} - 1\right) < 0$$

donc la suite (V_n) est strictement décroissante. SI N PAIR SINON PAS ADJ

Les suites (U_n) et (V_n) sont donc adjacentes

Etudier la convergence d'une suite

Exercice 7 :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$: la suite est donc convergente, de limite 0

- $\lim_{n\to+\infty} (\frac{3}{5})^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{5} < 1$ ainsi $\lim_{n\to+\infty} 2 - (\frac{3}{5})^n = 2$: la suite est donc convergente de limite 2

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1 \end{cases}$$

On admettra que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{2} < U_n$

1. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}U_n + 1 - U_n = -\frac{2}{3}U_n + 1$
   Or $U_n > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}U_n > 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}U_n < -1 \Leftrightarrow= -\frac{2}{3}U_n + 1 < 0$: la suite est donc strictement décroissante
2. La suite est décroissante (d'après 1.) et minorée (par hypothèse $U_n > \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) : elle est donc convergente.
3. Posons $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$. On peut considérer pour un n très grand que $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$. Dès lors on a l'égalité $l = \frac{1}{3}l + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}l = 1 \Leftrightarrow l = \frac{3}{2}$

Exercice 8 :

1. Reportez vous à la méthode 4 du cours de première pour la technique.
   Vous devriez pouvoir lire sur l'axe des abscisses de votre graphique :
   $$U_0 = 8\ ;\ U_1 = 5.66\ ;\ U_2 = 5.19\ ;\ U_3 = 5.06\ ;\ U_4 = 5.02$$
2. On cherche le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$
   $$U_{n+1} - U_n = \frac{7U_n - 5}{U_n + 1} - U_n = \frac{7U_n - 5}{U_n + 1} - \frac{U_n(U_n + 1)}{U_n + 1} = \frac{7U_n - 5 - U_n{}^2 - U_n}{U_n + 1}$$
   $$= \frac{-U_n{}^2 + 6U_n - 5}{U_n + 1}$$
   Le discriminant du polynôme $-U_n{}^2 + 6U_n - 5$ étant $\Delta = 16 > 0$ on a deux solutions à l'équation $-U_n{}^2 + 6U_n - 5 = 0$, valant respectivement 1 et 5
   Ainsi (vous pouvez faire un tableau de signes) $U_{n+1} - U_n > 0$ entre 1 et 5 et < 0 ailleurs.
   Puisque l'on a supposé que $U_n > 5$, $U_{n+1} - U_n > 0$ et la suite est bien décroissante.
3. On a vu précédemment que la suite était décroissante et minorée par 5 : elle est donc bien convergente.
   De plus, si l'on pose $l = u_n = u_{n+1}$ on a :
   $$l = \frac{7l - 5}{l + 1} \Leftrightarrow l(l + 1) = 7l - 5 \Leftrightarrow l^2 + l = 7l - 5 \Leftrightarrow -l^2 + 6l - 5 = 0$$
   Le polynôme étant le même que dans la question précédente, ses solutions sont également 1 et 5. Mais comme l'on a supposé que $U_n > 5$, sa limite ne peut être 1 et donc
   $$\lim U_n = 5$$

Exercice 9 :

1. a. on donne $a = \frac{1}{8}$ donc $U_0 = \frac{1}{8}$
   $$U_1 = U_0(2 - U_0) = \frac{1}{8}\left(2 - \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{64}$$
   $$U_2 = U_1(2 - U_1) = \frac{15}{64}\left(2 - \frac{15}{64}\right) = \frac{1695}{4096}$$

   b.

2. on donne maintenant $0 < a < 1$
   a. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $0 < U_n < 1$» Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   INITIALISATION :
   $U_0 = a$ et $0 < a < 1$
   On a donc bien $0 < U_0 < 1$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   HEREDITE :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $U_{n+1} = U_n(2 - U_n)$. On pose $f(x) = x(2 - x)$ telle que $U_{n+1} = f(U_n)$
   $f'(x) = 2 - 2x > 0$ sur $[0\,;1[$ et < 0 sur $]1\,;\,+\infty[$ et donc
   f croissante sur $[0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$. De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc
   $0 < f(x) < 1$ si $0 < x < 1$
   Ainsi $0 < U_{n+1} < 1$ si $0 < U_n < 1$
   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

   b. $U_{n+1} - U_n = U_n(2 - U_n) - U_n = U_n - {U_n}^2 = U_n(1 - U_n)$
   Or $0 < U_n < 1$ donc $1 - U_n > 0$ et donc $U_n(1 - U_n) > 0$
   On en déduit que la suite est (U_n) est strictement croissante

   c. Puisque la suite est croissante et majorée (par 1) elle converge

3.
   a. $V_{n+1} = 1 - U_{n+1} = 1 - U_n(2 - U_n) = 1 - 2U_n + {U_n}^2 = (1 - U_n)^2 = {V_n}^2$

   b. On va utiliser une récurrence
   INITIALISATION :
   $V_0 = 1 - U_0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ et $(\frac{7}{8})^{2^0} = \frac{7}{8}$
   On a donc bien $V_0 = (\frac{7}{8})^{2^0}$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   HEREDITE :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $V_{n+1} = {V_n}^2 = ((\frac{7}{8})^{2^n})^2 = (\frac{7}{8})^{2^{n+2}} = (\frac{7}{8})^{2^{(n+1)}}$
   Ainsi $V_{n+1} = (\frac{7}{8})^{2^{(n+1)}}$
   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

   c. $V_n = (\frac{7}{8})^{2^n} = (\frac{49}{64})^n$ et comme $-1 < \frac{49}{64} < 1$, $\lim V_n = 0$
   Par suite $V_n = 1 - U_n \Leftrightarrow U_n = 1 - V_n$ donc $\lim U_n = 1 - \lim V_n = 1$

Exercice 10 :

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n > 3$ » Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   INITIALISATION :

$U_0 = 10 > 3$
On a donc bien $U_0 > 3$
Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

HEREDITE :
On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$U_n > 3$ donc $U_n + 6 > 9$ et $\sqrt{U_n + 6} > \sqrt{9} = 3$.
On a donc bien $U_{n+1} > 3$.
Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

2. $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 6} - U_n = \sqrt{U_n + 6} - U_n \times \frac{\sqrt{U_n+6}+U_n}{\sqrt{U_n+6}+U_n} = \frac{U_n+6-U_n{}^2}{\sqrt{U_n+6}+U_n}$
   Le polynôme $U_n + 6 - U_n{}^2$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 > 0$
   Ses racines sont -2 et 3 . On en déduit que sa factorisation est $-(U_n + 2)(U_n - 3)$
   Et donc
   $$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n + 2)(U_n - 3)}{\sqrt{U_n + 6} + U_n}$$
3. Comme $U_n > 3$, on a $U_n - 3 > 0$ et donc $-\frac{(U_n+2)(U_n-3)}{\sqrt{U_n+6}+U_n} < 0$
   On en déduit que $U_{n+1} - U_n < 0$ et ainsi que (U_n) est décroissante
4. La suite est décroissante et minorée : elle est donc convergente.
5. En posant $l = \lim U_n = \lim U_{n+1}$ on obtient :
   $l = \sqrt{l + 6} \Leftrightarrow l^2 = l + 6 \Leftrightarrow l^2 - l - 6 = 0$ Le polynôme $l^2 - l - 6$ a pour discriminant
   $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 > 0$
   Ses racines sont -2 et 3
   Puisque (U_n) est minorée par 3, sa limite ne peut pas être -2 : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

Exercice 11 :

1.
2.
3. On va utiliser un raisonnement par récurrence
   Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n > 2$ »
   Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   INITIALISATION :
   $U_0 = 4$ et $4 > 2$
   On a donc bien $U_0 > 2$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   HEREDITE :
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.
   Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$
   Or $U_n > 2$ donc $3U_n - 2 > 4$ et $\sqrt{3U_n - 2} > 2$

Donc $U_{n+1} > 2$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n - 2} - U_n = \left(\sqrt{3U_n - 2} - U_n\right) \times \frac{\sqrt{3U_n-2}+U_n}{\sqrt{3U_n-2}+U_n} = \frac{3U_n-2-U_n{}^2}{\sqrt{3U_n-2}+U_n}$
   A l'aide par exemple d'un tableau de signes, on déduit que $U_{n+1} - U_n < 0$
   Ainsi la suite (U_n) est décroissante
5. La suite (U_n) est minorée par 2 et décroissante, donc convergente
6. La suite (U_n) est minorée par 2 donc sa limite ne peut être inférieure à 2. Donc $l \geq 2$
7. On remplace U_{n+1} et U_n par l, ce qui donne $l = \sqrt{3l - 2}$
8. $l = \sqrt{3l - 2} \Leftrightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Leftrightarrow l = 2$ ou $l = 1$
   Puisque $l \geq 2$, on en déduit que $l = 2$

<u>Exercice 12</u> :

1. On va utiliser un raisonnement par récurrence
   Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n > 0$ »
   Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   <u>INITIALISATION :</u>
   $U_0 = 3$ et $3 > 0$
   On a donc bien $U_0 > 0$
   Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

   <u>HEREDITE :</u>
   On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.
   Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2+U_n}$
   Or $U_n > 0$ donc $3U_n + 2 > 0$ et $2 + U_n > 0$
   Donc $U_{n+1} > 0$

   Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. On a par calcul
   $$U_{n+1} - 2 = \frac{3U_n + 2}{2 + U_n} - 2 = \frac{3U_n + 2 - 2(2 + U_n)}{2 + U_n} = \frac{U_n - 2}{2 + U_n}$$
   De même
   $$U_{n+1} - 3 = \frac{3U_n + 2}{2 + U_n} - 3 = \frac{3U_n + 2 - 3(2 + U_n)}{2 + U_n} = \frac{-4}{2 + U_n}$$
   On a démontré précédemment que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ donc $U_{n+1} - 3 = \frac{-4}{2+U_n} < 0$
   Et ainsi$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < 3$.
   Donc si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $U_n < 3$
   On démontre par récurrence que $U_n - 2 > 0$
   Indication : $U_{n+1} - 2 = \frac{U_n-2}{2+U_n}$. Or, $U_n - 2 > 0$ et $U_n > 0$ donc $U_{n+1} - 2 > 0$
   On en déduit immédiatement que $U_n > 2$

Et au final que $2 < U_n < 3$

3. On étudie le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 2}{2 + U_n} - U_n = \frac{3U_n + 2 - U_n(2 + U_n)}{2 + U_n} = \frac{-U_n{}^2 + U_n - 2}{2 + U_n}$$

Le numérateur est un polynôme et son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7 < 0$ donc ce polynôme n'admet pas de racine : son signe est toujours le même $\forall n \in \mathbb{N}$

Or $U_0 = 3$ et $-U_0{}^2 + U_0 - 2 = -8$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, -U_n{}^2 + U_n - 2 < 0$

Et comme $2 + U_n > 0$ on a au final que $U_{n+1} - U_n < 0$

La suite (U_n) est donc strictement décroissante

Par ailleurs, puisque $2 < U_n < 3$ la suite est minorée par 2 : on peut en déduire que cette suite est convergente

Remarque : on ne peut pas en en revanche pas en déduire que cette suite converge vers 2. Dans les hypothèses, rien ne s'oppose à ce qu'elle tende vers 2.5 par exemple.

Problème

1.

a. On a :

$$V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2/_{2^{n+1}}}{n^2/_{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{n})^2$$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > 1$ donc $\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > \frac{1}{2}$ donc $V_n > \frac{1}{2}$

c.

$$V_n < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 < \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + \frac{1}{N} < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{N} < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}$$

Or, N est positif et $\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1} \approx 4.45$ donc le plus petit entier N est $N = 5$

d. $V_n < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow U_{n+1} < \frac{3}{4}U_n$

2.

a. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times U_5$»

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

INITIALISATION :

$\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} \times U_5 = U_5$ donc on a bien , $U_5 \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times U_5$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang initial.

HEREDITE :

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a démontré précédemment que $U_{n+1} < \frac{3}{4}U_n$ donc $U_{n+1} < \frac{3}{4} \times (\frac{3}{4})^{n-5} \times U_5 \Leftrightarrow$

$U_{n+1} < (\frac{3}{4})^{n-4} \times U_5$

Comme $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

b. $S_n = U_5 + U_6 + \ldots + U_n = \sum_{k=5}^{n} U_k$

Or, $U_k \leq (\frac{3}{4})^{k-5} \times U_5$

Donc

$$\sum_{k=5}^{n} U_k \leq \sum_{k=5}^{n} (\frac{3}{4})^{k-5} \times U_5$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=5}^{n} U_k \leq U_5 \sum_{k=5}^{n} (\frac{3}{4})^{k-5}$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \ldots + (\frac{3}{4})^{n-5}] \times U_5$$

c.

$$\sum_{k=5}^{n} (\frac{3}{4})^{k-5} = \sum_{k=0}^{n-5} (\frac{3}{4})^{k} = \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n-4}}{\frac{1}{4}} = 4 \times (1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}) \leq 4$$

Donc $S_n = U_5 \sum_{k=5}^{n} (\frac{3}{4})^{k-5} \leq 4U_5$

3.

$S_{n+1} - S_n = U_5 + U_6 + \ldots + U_n + U_{n+1} - (U_5 + U_6 + \ldots + U_n)$

$= U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$

On en déduit que la suite est strictement croissante

Par ailleurs, on a démontré que $S_n \leq 4U_5$ donc la suite est majorée

On en déduit directement qu'elle est convergente