Corrigés des exercices

Utiliser des variables aléatoires réelles

Exercice 1 :

1. X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$ ou 4
   D'où la loi de probabilité suivante :

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

2. $E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$

Exercice 2 :

1. X peut prendre les valeurs $0, 1$ ou 2. On a :

$$P(X = 0) = ('tirer\ deux\ boules\ vertes') = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 1) = ('tirer\ une\ verte\ et\ une\ rouge') = \frac{8+8}{36} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 0) = ('tirer\ deux\ boules\ rouges') = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

D'où la loi de probabilité suivante :

X	0	1	2
$P(X)$	$4/9$	$4/9$	$1/9$

2. $E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 0^2 \times \frac{4}{9} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Exercice 3 :

1. Si l'on retire 4 boules rouges de l'urne, il ne reste plus que des blanches, donc on peut tirer au maximum 4 rouges de l'urne. Ainsi X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$ ou 4.

2. $P(X = 0)$ est la probabilité de tirer une blanche directement donc $P(X = 0) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(X = 1)$ est la probabilité d'avoir retiré de l'urne une blanche ET une rouge donc
$P(X = 1) = P(B \cap R) = P_R(B)x\ P(R) = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{45}$
$P(X = 2)$ est la probabilité d'avoir retiré de l'urne une blanche ET une rouge ET une rouge donc $P(X = 2) = P(B \cap R \cap R) = \frac{6}{8} \times \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$
$P(X = 3)$ est la probabilité d'avoir retiré de l'urne une blanche ET une rouge ET une rouge ET une rouge donc $P(X = 3) = P(B \cap R \cap R \cap R) = \frac{6}{7} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$
$P(X = 4)$ est la probabilité d'avoir retiré de l'urne une blanche ET une rouge ET une rouge ET une rouge ET une rouge donc $P(X = 4) = P(B \cap R \cap R \cap R \cap R) = \frac{6}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{144}{30240} = \frac{1}{210}$
Dès lors, la loi de probabilité de X est :

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{210}$

Remarque : on pourra rapidement vérifier (à la calculatrice par exemple) que l'on a bien $\frac{3}{5} + \frac{12}{45} + \frac{1}{10} + \frac{1}{35} + \frac{1}{210} = 1$

3. Par suite, on en déduit que
$E(X) = \frac{3}{5} \times 0 + \frac{12}{45} \times 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{35} \times 3 + \frac{1}{210} \times 4 = \frac{12}{45} + \frac{2}{10} + \frac{3}{35} + \frac{4}{210} = \frac{4}{7}$
Ce résultat signifie que l'on tirera en moyenne $\frac{4}{7}$ boules rouges avant de tirer la première blanche.
4. Enfin, pour déterminer la variance, on doit chercher le **moment d'ordre 2** de la variable aléatoire X, c'est-à-dire $E(X^2) = \frac{3}{5} \times 0^2 + \frac{12}{45} \times 1^2 + \frac{1}{10} \times 2^2 + \frac{1}{35} \times 3^2 + \frac{1}{210} \times 4^2 = \frac{12}{45} + \frac{4}{10} + \frac{9}{35} + \frac{16}{210} = 1$
Par ailleurs, $\left(E(X)\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$
Ce qui donne au final, $V(X) = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49}$

Utiliser la loi binomiale

Exercice 4 :

Le jeu nous autorise à obtenir jusqu'à 3 faces d'affilée donc $X = 0, 1, 2, 3$

Par ailleurs, on peut lancer jusqu'à 3 fois la pièce donc $Y = 1, 2, 3$

L'évènement $(X = 0)$ ne peut être obtenu que si l'on obtient pile dès le premier lancer. Dès lors, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$

L'évènement $(X = 1)$ ne peut être obtenu que si l'on obtient face au premier lancer, puis pile. Dès lors, $P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ car les lancers sont indépendants.

De la même manière, $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

L'évènement $(Y = 1)$ ne peut être réalisé que si l'on obtient pile dès le premier lancer. Dès lors, $P(Y = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$

L'évènement $(Y = 2)$ ne peut être réalisé que si l'on obtient face au premier lancer, puis pile. Dès lors, $P(Y = 2) = P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ car les lancers sont indépendants.

Enfin, l'évènement $(Y = 3)$ ne peut être réalisé que si l'on obtient deux face, puis un pile ou bien trois face. Ainsi $P(Y = 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

X	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 5 :

X peut prendre deux valeurs : 0 ou 1.

De plus $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. En posant $P(X = 1) = p$, on constate bien que $P(X = 0) = 1 - p$. Dès lors on en déduit que X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p = \frac{1}{2}$

Exercice 6 :

1. On constate (voir exercice 1) que le lancer d'une pièce à 10 reprises est la répétition indépendante d'une épreuve de Bernoulli : X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 (nombre de lancers) et $\frac{1}{2}$ (probabilité d'obtention d'un succès : ici face)

   On écrira $X \sim B(10, \frac{1}{2})$
2. La probabilité d'obtenir exactement 4 faces en 10 lancers est $P(X = 4) = \binom{10}{4}(\frac{1}{2})^4(1 - \frac{1}{2})^{10-4} = \binom{10}{4}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^6 = 210 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{64} = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}$
3. La probabilité d'obtenir exactement 4 piles en 10 lancers est $P(X = 6) = \binom{10}{6}(\frac{1}{2})^6(1 - \frac{1}{2})^{10-6} = \binom{10}{6}(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^4 = 210 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{64} = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}$

4. La probabilité d'obtenir au moins une fois face en 10 lancers est $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(\frac{1}{2})^0(1-\frac{1}{2})^{10-0} = 1 - \binom{10}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10} = 1 - 1 \times 1 \times \frac{1}{1024} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$
5. La probabilité d'obtenir au plus 9 fois face en 10 lancers est $P(X \leq 9) = 1 - P(X > 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10}(\frac{1}{2})^{10}(1-\frac{1}{2})^{10-10} = 1 - \binom{10}{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^0 = 1 - 1 \times \frac{1}{1024} \times 1 = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$
6. $E(X) = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

   Et $V(X) = np(1-p) = 10 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$
7. En reprenant la question 4 en remplaçant 10 par n, on obtient $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(\frac{1}{2})^0(1-\frac{1}{2})^{n-0} = 1 - \binom{n}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^n = 1 - (\frac{1}{2})^n$

   Par suite, on cherche n tel que $1 - (\frac{1}{2})^n \geq 0.9 \Leftrightarrow -(\frac{1}{2})^n \geq 0.9 - 1 \Leftrightarrow -(\frac{1}{2})^n \geq -0.1$

   $\Leftrightarrow (\frac{1}{2})^n \leq 0.1 \Leftrightarrow e^{n\ln(\frac{1}{2})} \leq 0.1 \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leq \ln(0.1) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(\frac{1}{2})}$

   Or, $\frac{\ln(0.1)}{\ln(\frac{1}{2})} \approx 3.32$

   Par conséquent, le plus petit entier entier n vérifiant l'inéquation est $n = 4$

<u>Exercice 7</u> :

1. L'élève peut répondre correctement de 0 à 5 questions donc $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
2. Les tirages sont indépendants donc la variable X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{4}$ (puisqu'il y a 4 questions et une seule bonne réponse parmi celles-ci)

   D'après le cours, $E(X) = np = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ et $V(X) = np(1-p) = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
3. Le nombre de bonnes réponses est donné par la valeur de la variable aléatoire X. Dès lors le nombre de mauvaises réponses est $(5 - X)$. La note est donc déterminée par $Y = 2X + (-1) \times (5 - X) = 2X + X - 5 = 3X - 5$

   Ainsi $E(Y) = E(3X - 5) = 3E(X) - 5 = 3x\frac{5}{4} - 5 = \frac{15}{4} - \frac{20}{4} = -\frac{5}{4}$

   Interprétation : On pourrait traduire grossièrement ce résultat par la constatation que si l'élève décide de répondre complètement au hasard à ce Q.C.M, il peut espérer obtenir légèrement inférieure à 0

Problèmes

Problème 1 :

1. Posons X la variable aléatoire associée au numéro de l'étage ou s'arrête l'ascenseur (le rez de chaussée sera considéré comme l'étage 0)
   X peut donc prendre les valeurs $0, 1, 2, 3, 4$ ou 5
   Si p est la probabilité équivalente de s'arrêter à chacun des étages (sauf rez de chaussée) on a par équiprobabilité la relation $\frac{1}{2} + p + p + p + p + p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{10}$
   D'où la loi de probabilité suivante :

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	$1/2$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$

2.
   a. La difficulté est ici de déterminer les valeurs possibles de T. Enumérons toutes les possibilités :
   - L'ascenseur est au rez de chaussée : puisque l'on ne prend pas en compte le temps d'ouverture des portes, le temps d'attente sera de $0s$
   - L'ascenseur est au premier étage : le temps d'attente sera de $2 + 4 + 2 = 8s$
   - L'ascenseur est au deuxième étage : le temps d'attente sera de $2 + 4 \times 2 + 2 = 12s$
   - L'ascenseur est au troisième étage : le temps d'attente sera de $2 + 4 \times 3 + 2 = 16s$
   - L'ascenseur est au quatrième étage : le temps d'attente sera de $2 + 4 \times 4 + 2 = 20s$
   - L'ascenseur est au cinquième étage : le temps d'attente sera de $2 + 4 \times 5 + 2 = 24s$

   D'où la loi de probabilité de T :

T	0	8	12	16	20	24
$P(T)$	$1/2$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$

   b. $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{10} + 12 \times \frac{1}{10} + 16 \times \frac{1}{10} + 20 \times \frac{1}{10} + 24 \times \frac{1}{10} = \frac{80}{10} = 8$
   Ce résultat signifie qu'un individu appelant l'ascenseur du rez de chaussée attendra en moyenne 8 secondes qu'il arrive

Problème 2 :

A.
1. Le rongeur a deux chances sur six de trouver une sortie : la proba recherchée est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
2. Le rongeur à la même proba à chaque nouvelle tentative de trouver une sortie : les évènements sont indépendants (voir cours terminale). Pour sortir au 5$^{\text{ème}}$ essai, le

rongeur a essuyé 4 échecs successifs (de proba $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$) avant de rencontrer le succès, de proba $\frac{1}{3}$

Ainsi la proba recherchée est $\frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^4$

3. Généralisation : la proba recherchée est $\frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^{n-1}$: il s'agit d'une loi de probabilité particulière, dite loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ (hors programme)

B.

1. Le rongeur peut réaliser de 1 à 5 essais pour découvrir une sortie donc $X = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5
2.

X	1	2	3	4	5
$P(P = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

3. $E(X) = \frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{9}{15} + \frac{4}{5} + \frac{10}{15} = \frac{44}{15}$
   Cette quantité signifie que le rongeur devra tenter en moyenne $\frac{44}{15}$ fois (environ 3) fois sa chance pour trouver la sortie.

Problème 3 :

Supposons que cette famille ait n enfants au total.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de garçons dans la famille.

On souhaite d'après l'énoncé que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

La détermination de chacun des sexes des enfants est indépendant et X suit donc une loi binomiale de paramètres n et 0,51. Ici on cherche n le nombre d'enfants tel que l'inégalité précédente soit vérifiée.

Or, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0{,}51)^0(1 - 0{,}51)^{n-0} = 1 - (0{,}49)^n$

Il reste à résoudre l'inéquation $1 - (0{,}49)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow (0{,}49)^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow e^{n\ln(0.49)} \leq 0.01 \Leftrightarrow n\ln(0.49) \leq \ln(0.01)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.49)} \Leftrightarrow n \geq 6.46$

La famille devra donc être composée d'au moins 7 enfants

Réponse question bonus :

On pourrait être tenté de chercher $P(X=1)=\binom{n}{1}(0{,}51)^1(1-0{,}51)^{1-0}$, ce qui est incalculable (vérifiez !). De plus, on introduit ici une notion d'ordre : on ne souhaite pas un garçon à n'importe quelle position dans la famille mais bien un garçon en dernier.

Il s'agit ici d'une application typique de la loi géométrique, qui modélise la répétition d'épreuves de Bernoulli jusqu'à la survenance d'un premier succès.

Soit p la probabilité de succès, le succès interviendra au terme de X tentatives avec une probabilité

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}\times p$$

Application : Ici $p=0.51$et n est la valeur recherchée

$$P(X=n)=(0.49)^{n-1}\times 0.51$$

Et

$(0.49)^{n-1}\times 0.51\leq 0{,}01 \Leftrightarrow (0.49)^{n-1}\leq 0{,}0196 \Leftrightarrow e^{(n-1)\ln(0.49)}\leq 0.0196 \Leftrightarrow n-1\geq \frac{\ln(0.0196)}{\ln(0.49)}$
$\Leftrightarrow n-1\geq 5.51 \Leftrightarrow n\geq 6.51$

Problème 4 :

1.
   a. Le fait qu'un seul groupe se présente suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
   Puisque les groupes se présentent indépendamment, la présentation de 12 groupes suit donc une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{7}{8}$.
   Soit Y la variable aléatoire associée au nombre de 'groupes se présentant.
   $$P(Y=12)=\binom{12}{12}\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}=\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\approx 0.201$$
   Cette probabilité est donc bien comprise entre 0.20 et 0.21

   b. D'après ce qui précède, le fait que les 12 groupes se soient présentés un jour donné suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\frac{7}{8}\right)^{12}$
   Puisque les groupes se présentent indépendamment d'un jour à l'autre, la présentation des 12 groupes sur une période de 30 jours suit donc une loi binomiale de paramètres 30 et $\left(\frac{7}{8}\right)^{12}$

   c. L'évènement $X=30$ signifie que les 12 groupes se sont bien présentés 30 jours d'affilés
   $$P(X=30)=\binom{30}{30}\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)^{30}\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)^{0}=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)^{30}=\left(\frac{7}{8}\right)^{360}$$
   L'évènement $X=30$ signifie que les 12 groupes ne sont présentés ensemble aucun des 30 jours du mois

$$P(X=0)=\binom{30}{0}\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)^{0}\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)^{30}=\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)^{30}$$

d. Dans le cadre d'une loi binomiale, $E(X)=np$

$$E(X)=30\times\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\approx 6.04$$

Ce résultat signifie que les 12 groupes se présenteront tous ensemble en moyenne 6 jours par mois.

Par ailleurs,

$$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{30\times\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\times\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{12}\right)}$$

e. Percevoir 11 euros dans la journée signifie que 11 groupes se sont présentés, donc

$$P(S=11)=P(Y=11)=\binom{12}{11}\left(\frac{7}{8}\right)^{11}\left(\frac{1}{8}\right)^{1}=12\times\left(\frac{7}{8}\right)^{11}\times\frac{1}{8}=\frac{12\times 7^{11}}{8^{12}}$$

S suit tout comme Y une une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{7}{8}$ donc

$$E(S)=12\times\frac{7}{8}=\frac{84}{8}=\frac{21}{2}=10.5$$

L'association peut donc espérer percevoir en moyenne 10.5 euros par jour.

2.

a. On se retrouve dans le cadre d'une loi binomiale de paramètres 13 et $\frac{7}{8}$ donc

$$P_{13}=\binom{13}{13}\left(\frac{7}{8}\right)^{13}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}=\left(\frac{7}{8}\right)^{13}$$

Par confort, on notera par la suite Z la v.a associée à cette situation.

b. R a deux issues : l'association paye 2 euros si les 13 groupes se présentent de probabilité $\left(\frac{7}{8}\right)^{13}$ et ne paye rien si moins de 13 groupes se présentent, de probabilité $1-\left(\frac{7}{8}\right)^{13}$. La loi de probabilité de R est donnée par :

r_i	0	2
$P(R=r_i)$	$1-\left(\frac{7}{8}\right)^{13}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^{13}$

c. Le gain net moyen est donné par

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{13}kP(Z=k)=\sum_{k=0}^{13}k\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}$$

La perte nette moyenne est donné par

$$E(R) = 0 \times \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{13}\right) + 2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^{13} = 2P_{13}$$

Donc le gain moyen est bien

$$\sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k} \left(\frac{7}{8}\right)^k \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2P_{13}$$

L'espérance d'une loi binomiale de paramètres 13 et $\frac{7}{8}$ est donnée par

$$E(X) = 13 \times \frac{7}{8} = 11.375$$

Et puisque $2P_{13} = 2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^{13}$ on a

$$\sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k} \left(\frac{7}{8}\right)^k \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2P_{13} = 11.375 - 2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 11.023$$

d. Puisque le gain moyen quotidien a augmenté $(11.023 > 10.5)$ depuis la nouvelle organisation, la décision est bien rentable à l'association.