Corrigés des exercices

Calcul dans $\mathbb{C}$: utiliser le conjugué d'un nombre complexe

<u>Exercice 1</u> :

$$\bar{z} = \overline{\frac{i}{i-2} + \frac{4}{6-3i}} = \overline{\frac{i}{i-2}} + \overline{\frac{4}{6-3i}} = \frac{-i}{-i-2} + \frac{4}{6+3i}$$

$$\bar{z} = \frac{-i}{-i-2} + \frac{4}{6+3i} = \left(\frac{-i}{-i-2}\right) \times \left(\frac{i-2}{i-2}\right) + \left(\frac{4}{6+3i}\right) \times \left(\frac{6-3i}{6-3i}\right) = \frac{-i^2+2i}{4-i^2} + \frac{24-12i}{36-9i^2}$$
$$= \frac{1+2i}{5} + \frac{24-12i}{45} = \frac{9+18i+24-12i}{45} = \frac{33+6i}{45}$$

On en déduit que $Re(\,\bar{z}\,) = \frac{33}{45}$ et $Im(\,\bar{z}\,) = \frac{6i}{45}$

<u>Exercice 2</u> :

- $z = \frac{3}{7i}$

$$z = \frac{3 \times (-7i)}{7i \times (-7i)}$$
$$z = \frac{-21i}{-49i^2}$$
$$z = \frac{-21i}{49}$$
$$z = \frac{-3i}{7}$$

- $z = \frac{3+4i}{1-2i}$

$$z = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$z = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-4i^2}$$
$$z = \frac{3+10i-8}{1+4}$$
$$z = \frac{-5+10i}{5}$$
$$z = -1+2i$$

- $z = \frac{3+i}{(4+2i)+(5-i)}$

$$z = \frac{3+i}{4+2i+5-i}$$
$$z = \frac{3+i}{9+i}$$
$$z = \frac{(3+i)(9-i)}{(9+i)(9-i)}$$
$$z = \frac{27-3i+9i-i^2}{81-i^2}$$
$$z = \frac{27+6i+1}{81+1}$$
$$z = \frac{28+6i}{82}$$
$$z = \frac{14+3i}{41}$$

- $z = \frac{3+4i}{(1+2i)^2}$

$$z = \frac{3+4i}{1+2\times 1\times 2i+4i^2}$$
$$z = \frac{3+4i}{1+4i-4}$$
$$z = \frac{3+4i}{-3+4i}$$
$$z = \frac{(3+4i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$z = \frac{-9-12i-12i-16i^2}{9-16i^2}$$
$$z = \frac{-9-24i+16}{9+16}$$
$$z = \frac{7-24i}{25}$$

- $z = \frac{\frac{1+i}{1-i}-2}{\frac{2}{1-i}+4}$

$$z = \frac{\frac{1+i}{1-i}-\frac{2(1-i)}{1-i}}{\frac{2}{1-i}+\frac{4(1-i)}{1-i}}$$

$$z = \frac{\frac{1+i-2+2i}{1-i}}{\frac{2+4-4i}{1-i}}$$

$$z = \frac{\frac{-1+3i}{1-i}}{\frac{6-4i}{1-i}}$$

$$z = \frac{-1+3i}{1-i} \times \frac{1-i}{6-4i}$$

$$z = \frac{-1+3i}{6-4i}$$

$$z = \frac{(-1+3i)(6+4i)}{(6-4i)(6+4i)}$$

$$z = \frac{-6-4i+18i+12i^2}{36-16i^2}$$

$$z = \frac{-6+14i-12}{36+16}$$

$$z = \frac{-18+14i}{52}$$

$$z = \frac{-9+7i}{26}$$

Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe

Exercice 3 :

$$z_1 = -3 - \sqrt{3}i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\arg(z_1)) = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\arg(z_1)) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\arg(z_1) = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$$

Ainsi la forme trigonométrique de z_1 est

$$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{-5\pi}{6} + \sin\frac{-5\pi}{6})$$

Et sa forme exponentielle

$$z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{-5\pi}{6}}$$

$$z_2 = -2i(2+2i) = -4i - 4i^2 = 4 - 4i$$

$$|z_2| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\arg(z_2)) = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arg(z_2)) = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\arg(z_2) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

Ainsi la forme trigonométrique de z_1 est

$$z_2 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + \sin\frac{-\pi}{4})$$

Et sa forme exponentielle

$$z_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$$

Exercice 4 :

1.

- $\boldsymbol{z_A = \sqrt{3} + i}$

Calcul du module :

On a : $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$ donc $a^2 = 3$ et $b^2 = 1$

On en déduit que : $|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$.

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit que

$$\theta = \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

- $\boldsymbol{z_B = \sqrt{3} - i}$

Calcul du module :

On a : $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$ donc $a^2 = 3$ et $b^2 = 1$

On en déduit que : $|z_B| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

On cherche λ tel que $\begin{cases} cos\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$

On obtient donc $\lambda = \frac{\pi}{6}$.

Comme $cos\theta$ est positif et $sin\theta$ est négatif, on obtient :

$$\theta = -\frac{\pi}{6}[2\pi].$$

- $\boldsymbol{z_C = 2\sqrt{3} + 2i}$

Calcul du module :

On a : $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 2$ donc $a^2 = 12$ et $b^2 = 4$

On en déduit que : $|z_C| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit que

$$\theta = \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

- $\boldsymbol{z_D = 2i}$

Calcul du module :

On a : $a = 0$ et $b = 2$ donc $a^2 = 0$ et $b^2 = 4$

On en déduit que : $|z_D| = \sqrt{0+4} = 2$.

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = 0 \\ sin\theta = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

On en déduit que

$$\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

2. $\boldsymbol{Z_1} = \frac{\boldsymbol{z_A}}{\boldsymbol{z_C}}$

Donc,

$$|Z_1| = \left|\frac{z_A}{z_C}\right| = \frac{|z_A|}{|z_C|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$arg(Z_1) = arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = arg(z_A) - \arg(z_C)\,[2\pi] = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}[2\pi] = 0[2\pi]$$

$\boldsymbol{Z_2} = \boldsymbol{z_B} \times \boldsymbol{z_D}$

Donc,

$$|Z_2| = |z_B \times z_D| = |z_B| \times |z_D| = 2 \times 2 = 4$$
$$arg(Z_1) = arg(z_B \times z_D) = arg(z_B) + \arg(z_D)\,[2\pi] = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}[2\pi] = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

3.

$$\left|{Z_1}^4\right| = |Z_1|^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$
$$arg\left({Z_1}^4\right) = 4 \times arg(Z_1) = 4 \times 0[2\pi] = 0[2\pi]$$

$$\left|{Z_2}^3\right| = |Z_2|^3 = (4)^3 = 64$$
$$arg\left({Z_2}^3\right) = 3 \times arg(Z_2) = 3 \times \frac{\pi}{3}[2\pi] = \pi[2\pi]$$

Exercice 5 :

1.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2 - 2i} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2 - 2i} \times \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{2\sqrt{6} + 2i\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i^2}{4 - 4i^2}$$
$$= \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4 + 4} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

2.

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \cos\left(\arg(z_1)\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\arg(z_1)\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\arg(z_1) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$$

Sa forme exponentielle est donc

$$z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$$

$$|z_2| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \cos\left(\arg(z_2)\right) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\arg(z_2)\right) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\arg(z_2) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

Sa forme exponentielle est donc

$$z_2 = 2\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}}$$

La forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$ est donc

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}}} = e^{\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3. En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

Or on a vu en 1. que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

On peut donc en déduire par identification que

$$cos\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

$$sin\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Exercice 6 :

$$\frac{1+iz}{z+i} = 1+i \Leftrightarrow 1+iz = (1+i)(z+i) \Leftrightarrow 1+iz = z+i+iz+i^2 \Leftrightarrow 1+1-i = z+iz-iz$$

$$\Leftrightarrow z = 2-i$$

$iz + 2\bar{z} = 2i - 3$

On pose $z = x + iy$. On a ainsi $\bar{z} = x - iy$. D'où :

$i(x+iy) + 2(x-iy) = 2i - 3$

$\Leftrightarrow ix + i^2y + 2x - 2iy = 2i - 3$

$\Leftrightarrow 2x - y + i(x - 2y) = 2i - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{7}{3} = -3 \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

En conclusion, $z = -\frac{8}{3} - \frac{7}{3}i$

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

Il s'agit d'un polynôme complexe du second degré, avec

$$\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 8 - 16 = -8 = 8i^2 < 0$$

Le polynôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{8i^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_2 = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{8i^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

Exercice 7 :

1. $\mathbf{-3z^2+6z+1=0}$

C'est une équation du type $az^2+bz+c=0$ avec $\begin{cases} a=-3 \\ b=6 \\ c=1 \end{cases}$.

On calcule Δ :

$$\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\times(-3)\times 1 = 36+12 = 48 > 0$$

donc

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{48}}{-6} = \frac{-6-\sqrt{16}\sqrt{3}}{-6} = \frac{-6-4\sqrt{3}}{-6} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \text{ (en simplifiant par } -2)$$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{48}}{-6} = \frac{-6+\sqrt{16}\sqrt{3}}{-6} = \frac{-6+4\sqrt{3}}{-6} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \text{ (en simplifiant par } -2)$$

Donc

$$S = \left\{\frac{3+2\sqrt{3}}{3} ; \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right\}$$

2. $\mathbf{z^2+z+1=0}$

C'est une équation du type $az^2+bz+c=0$ avec $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$.

On calcule Δ :

$$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 < 0$$

Donc

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$S = \left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

3. $\boldsymbol{(z-2i)(2z^2-3z+5)=0}$

Ce produit de facteurs est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul

ssi $z-2i=0$ ou $2z^2-3z+5=0$

- $z-2i=0 \Leftrightarrow z=2i$
- $2z^2-3z+5=0$

  C'est une équation du type $az^2+bz+c=0$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=-3. \\ c=5 \end{cases}$

  On calcule Δ :

$$\Delta = b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 5=9-40=-31<0$$

  Donc

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3-i\sqrt{31}}{4}$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3+i\sqrt{31}}{4}$$

On obtient finalement,

$$S=\left\{2i,\frac{3-i\sqrt{31}}{4};\frac{3+i\sqrt{31}}{4}\right\}$$

4. $\boldsymbol{z(z^2+1)(z^2-3)=0}$

Ce produit de facteurs est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul

ssi $z=0$ ou $z^2+1=0$ ou $z^2-3=0$

- $z=0$
- $z^2+1=0$

ssi $z^2=-1$

C'est une équation du type $z^2=\alpha$ avec $\alpha=-1<0$, donc :

$$z=-i\sqrt{1}=-i \text{ ou } z=i\sqrt{1}=i.$$

- $z^2-3=0$

ssi $z^2=3$

C'est une équation du type $z^2=\alpha$ avec $\alpha=3>0$, donc :

$$z=-\sqrt{3} \text{ ou } z=\sqrt{3}.$$

On obtient finalement,

$$S = \{0\ ;\ -i\ ;i\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\}$$

<u>Exercice 8</u> :

- $iz - 3 = z + 2i + (3i + 1)z$

ssi

$$iz - 3 = z + 2i + 3iz + z$$

$$iz - z - 3iz - z = 2i + 3$$

$$-2z - 2iz = 2i + 3$$

$$(-2 - 2i)z = 2i + 3$$

$$z = \frac{2i + 3}{-2 - 2i}$$

$$z = \frac{(2i + 3)(-2 + 2i)}{(-2 - 2i)(-2 + 2i)}$$

$$z = \frac{-4i + 4i^2 - 6 + 6i}{4 - 4i^2}$$

$$z = \frac{-6 - 4 + 2i}{8}$$

$$z = \frac{-10 + 2i}{8} = \frac{-5 + i}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}i$$

- $\frac{z-2}{z+i} = -i$

ssi

$$z - 2 = -i(z + i)$$

$$z - 2 = -iz - i^2$$

$$z - 2 = -iz + 1$$

$$z + iz = 1 + 2$$

$$(1 + i)z = 3$$

$$z = \frac{3}{1 + i}$$

$$z = \frac{3 \times (1 - i)}{(1 + i) \times (1 - i)}$$

$$z = \frac{3 - 3i}{1 - i^2}$$

$$z = \frac{3 - 3i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

- $3z(z + i) = -iz$

ssi

$$3z^2 + 3iz = -iz$$

$$3z^2 + 3iz + iz = 0$$

$$3z^2 + 4iz = 0$$

$$z(3z + 4i) = 0$$

Ce produit de facteurs est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul

ssi

$z = 0$ ou $\begin{gathered} 3z + 4i = 0 \\ 3z = -4i \\ z = -\frac{4}{3}i \end{gathered}$

Finalement,

$$S = \left\{-\frac{4}{3}i, 0\right\}$$

$$\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1 - i)z + (2 + i)z' = 1 + 4i \end{cases}$$

On isole z dans la première équation :

$$iz - z' = 2i$$

$$iz = z' + 2i$$

$$z = \frac{z' + 2i}{i}$$

$$z = \frac{(z' + 2i) \times (-i)}{i \times (-i)}$$

$$z = -2i^2 - iz'$$

$$z = 2 - iz'$$

On remplace z par sa valeur dans la deuxième équation et on fait sa résolution :

$$(1 - i)z + (2 + i)z' = 1 + 4i$$

$$(1-i)(2-iz')+(2+i)z'=1+4i$$

$$2-iz'-2i+i^2z'+2z'+iz'=1+4i$$

$$2-iz'-2i-z'+2z'+iz'=1+4i$$

$$z'+2-2i=1+4i$$

$$z'=1+4i-2+2i$$

$$z'=\color{red}{-1+6i}$$

On remplace z' par sa valeur dans l'expression de z :

$$z=2-iz'$$

$$z=2-i(-1+6i)$$

$$z=2+i-6i^2$$

$$z=2+i+6$$

$$z=\color{red}{8+i}$$

$$\begin{cases} iz-3z'=-7+4i \\ (1+i)z+2iz'=2+6i \end{cases}$$

On isole z dans la première équation :

$$iz-3z'=-7+4i$$

$$iz=3z'-7+4i$$

$$z=\frac{3z'-7+4i}{i}$$

$$z=\frac{(3z'-7+4i)\times(-i)}{i\times(-i)}$$

$$z=-3iz'+7i-4i^2$$

$$z=-3iz'+4+7i$$

On remplace z par sa valeur dans la deuxième équation et on fait sa résolution :

$$(1+i)z+2iz'=2+6i$$

$$(1+i)(-3iz'+4+7i)+2iz'=2+6i$$

$$-3iz'+4+7i-3i^2z'+4i+7i^2+2iz'=2+6i$$

$$-iz'+4+11i+3z'-7=2+6i$$

$$(3-i)z'=2+6i+3-11i$$

$$z' = \frac{5-5i}{3-i}$$

$$z' = \frac{(5-5i)\times(3+i)}{(3-i)\times(3+i)}$$

$$z' = \frac{15+5i-15i-5i^2}{9-i^2}$$

$$z' = \frac{20-10i}{10}$$

$$z' = 2-i$$

On remplace z' par sa valeur dans l'expression de z :

$$z = -3iz' + 4 + 7i$$

$$z = -3i(2-i) + 4 + 7i$$

$$z = -6i + 3i^2 + 4 + 7i$$

$$z = -6i - 3 + 4 + 7i$$

$$z = 1+i$$

Etudier la nature d'une configuration géométrique

<u>Exercice 9</u> :

On donne dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ les points A, B, C d'affixes respectives :

$z_A = -1 + i\sqrt{3}\,;\, z_B = -1 - i\sqrt{3}\,;\, z_C = 2$

Déterminez la forme trigonométrique de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ puis déduisez en la nature du triangle ABC.

$$Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} \times \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \frac{9+2i\sqrt{3}+3i^2}{9-3i^2}$$

$$= \frac{9-3+2i\sqrt{3}}{9+3} = \frac{6+2i\sqrt{3}}{12} = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}$$

Par suite,

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{12}{36}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\arg(Z)) = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/3} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin(\arg(Z)) = \dfrac{\sqrt{3}/6}{\sqrt{3}/3} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\arg(Z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Ainsi la forme trigonométrique de z_1 est

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6})$$

Et sa forme exponentielle

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

On a prouvé au final que

$$Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_C = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}(z_A - z_C)$$

On reconnaît une rotation, en l'occurrence la rotation de centre C transformant A en B : le triangle ABC est donc isocèle en C. (on remarque que comme l'argument n'est pas $\frac{\pi}{3}$ il ne peut pas être équilatéral)

Exercice 10 :

1. $-1 + i$ sous forme trigonométrique :

Calcul du module :

On a : $a = -1$ et $b = 1$ donc $a^2 = 1$ et $b^2 = 1$

On en déduit que : $|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On cherche λ tel que $\begin{cases} cos\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On obtient donc $\lambda = \frac{\pi}{4}$.

Comme $cos\theta$ est négatif et $sin\theta$ est positif, on obtient :

$$\theta = -\frac{\pi}{4}\pi + \pi[2\pi] = \frac{3\pi}{4}.$$

Et donc

$$-1+i \ = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$3(1+i)$ sous forme trigonométrique :

Calcul du module :

On a : $a = 3$ et $b = 3$ donc $a^2 = 9$ et $b^2 = 9$

On en déduit que : $|3(1+i)| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On en déduit que

$$\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi].$$

Et donc

$$3(1+i) \ = 3\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

2 sous forme trigonométrique :

Calcul du module :

On a : $a = 2$ et $b = 0$ donc $a^2 = 4$ et $b^2 = 0$

On en déduit que : $|2| = \sqrt{4} = 2$

Calcul de l'argument :

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{2}{2} = 1 \\ sin\theta = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$

On en déduit que

$$\theta = 0[2\pi].$$

Et donc

$$2 = 2(cos(0) + isin(0))$$

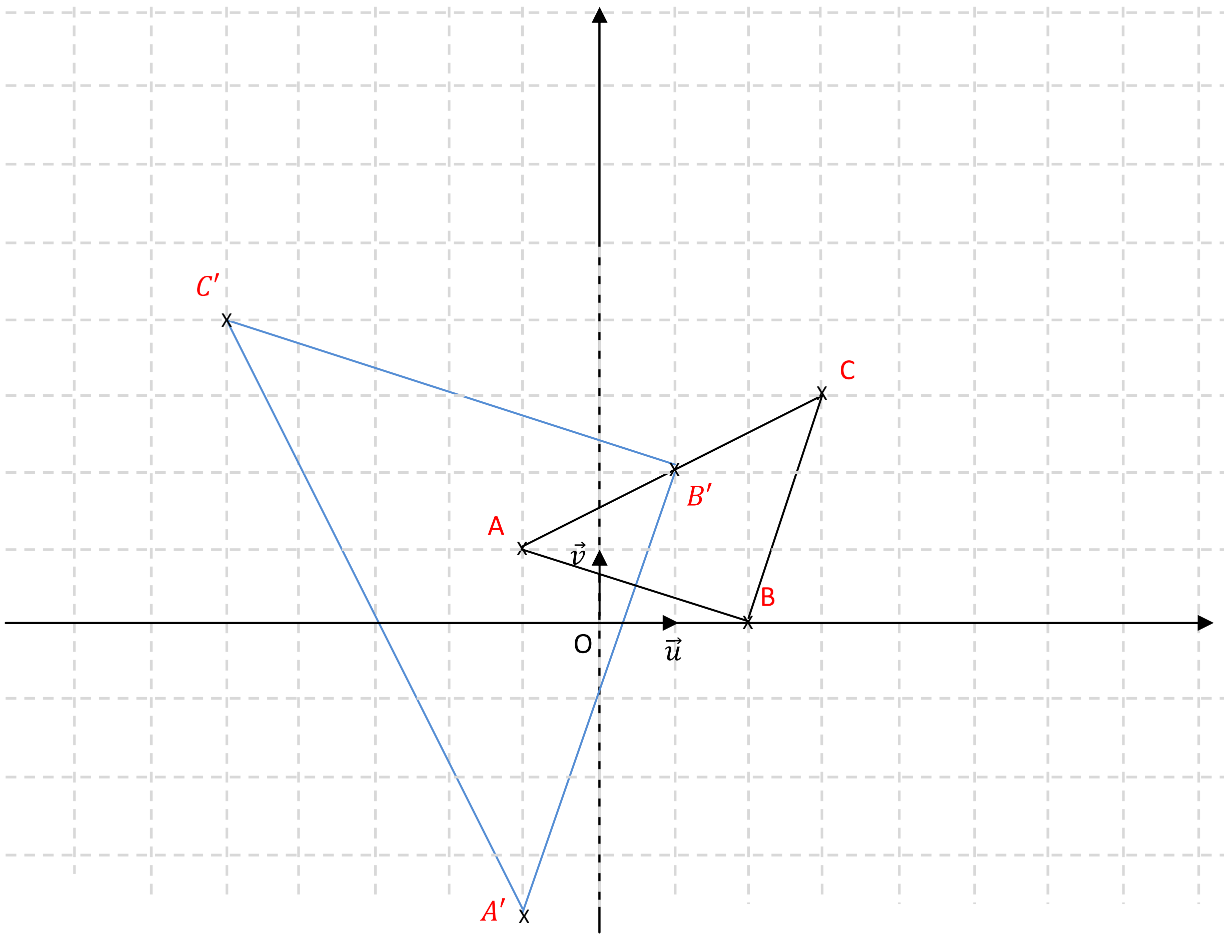
2. On désigne par a, b et c ces 3 nombres de façon que $|a| < |b| < |c|$ et par A, B et C leurs images respectives dans un plan (P) donc

$$a = -1 + i$$

$$b = 2$$

$$c = 3(1 + i) = 3 + 3i$$

a.



b. Montrer que ABC est un triangle isocèle rectangle en B :

$$AB = |b-a| = |2-(-1+i)| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$AC = |c-a| = |3+3i-(-1+i)| = |4+2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$BC = |c-b| = |3+3i-2| = |1+3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

On remarque que :

- $AB = BC$ donc ABC est un triangle isocèle.
- $AC^2 = 20 \; et \; AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.

On en déduit que :

$$ABC \text{ est un triangle isocèle rectangle}$$

3. a.

$a' = 2ia + 1 - 2i = 2i(-1+i) + 1 - 2i = -2i - 2 + 1 - 2i = -1 - 4i$

$b' = 2ib + 1 - 2i = 2i(2) + 1 - 2i = 4i + 1 - 2i = 1 + 2i$

$c' = 2ic + 1 - 2i = 2i(3+3i) + 1 - 2i = 6i - 6 + 1 - 2i = -5 + 4i$

Nature du triangle $A'B'C'$:

$$A'B' = |b'-a'| = |1+2i-(-1-4i)| = |2+6i| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$A'C' = |c'-a'| = |-5+4i-(-1-4i)| = |-4+8i| = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$B'C' = |c'-b'| = |-5+4i-(1+2i)| = |-6+2i| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

On remarque que :

- $A'B' = B'C'$ donc $A'B'C'$ est un triangle isocèle.
- $A'C'^2 = 80 \; et \; A'B'^2 + B'C'^2 = 40 + 40 = 80$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $A'B'C'$ est rectangle.

On en déduit que :

$$A'B'C' \text{ est un triangle isocèle rectangle}$$

b.

$$W = \frac{c'-b'}{c-b} = \frac{-5+4i-(1+2i)}{3+3i-2} = \frac{-6+2i}{1+3i} = \frac{(-6+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{-6+18i+2i+6}{1+9}$$

$$W = \frac{20i}{10} = 2i$$

Or, $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ donc :

$$W = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

On en déduit que :

$$|W| = \left|\frac{c' - b'}{c - b}\right| = \frac{B'C'}{BC} = 2$$

$$\arg W = \arg\left(\frac{c' - b'}{c - b}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Les droites (BC) et $(B'C')$ sont donc perpendiculaires.

Utiliser les formules d'Euler : méthode de l'arc moitié

Exercice 11 :

On considère le complexe $z = 1 + e^{i\theta}$. Déterminez le module et un argument de z lorsque $\theta \in]0\,;\,\pi[$

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$$

D'après les formules d'Euler,

$$e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

Ainsi,

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Par suite,

$$|z| = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| \times \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

Et si $\theta \in]0\,;\,\pi[$ on a $\frac{\theta}{2} \in]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ d'où $\cos\frac{\theta}{2} > 0$

Au final,

$$|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\arg z = \frac{\theta}{2}\ mod\ 2\pi$$

Exercice 12 :

1. $z_{A'} = z_A + (2+i) = 1 + i + 2 + i = 3 + 2i$
   $z_{B'} = z_B + (2+i) = 2 - i + 2 + i = 4$

2. $z_{B'} - z_A = -3(z_B - z_A) \Leftrightarrow z_{B'} = -3(z_B - z_A) + z_A$
   $\Leftrightarrow z_{B'} = -3\big(2 - i - (1+i)\big) + 1 + i$
   $\Leftrightarrow z_{B'} = -3(2 - i - 1 - i) + 1 + i$
   $\Leftrightarrow z_{B'} = -6 + 3i + 3 + 3i + 1 + i$
   $\Leftrightarrow z_{B'} = -2 + 7i$

3. $z_{A''} - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$
   $\Leftrightarrow z_{A''} = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B) + z_B$
   $\Leftrightarrow z_{A''} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\big(1 + i - (2-i)\big) + 2 - i$
   $\Leftrightarrow z_{A''} = i(-1+2i) + 2 - i$
   $\Leftrightarrow z_{A''} = -i + 2i^2 + 2 - i$
   $\Leftrightarrow z_{A''} = -2i$

Exercice 13 :

1. M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe 1 et de rayon 1 ssi $|z - z_A| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = 1$.

On a

$$z = 1 - e^{i\theta} \Leftrightarrow z - 1 = -e^{i\theta}$$

Donc,

$$|z-1| = \left|-e^{i\theta}\right| = 1$$

$$\arg(z-1) = \arg\left(-e^{i\theta}\right) = \arg(-1) + \arg\left(e^{i\theta}\right) = \pi + \theta[2\pi]$$

On sait que $\arg(z-1) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$.

Comme $\theta \in]0,2\pi[$, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) \neq \pi$ et donc $M \neq O$.

On en conclut que,

Le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe 1 et de rayon 1, privé du point O

2. $|z| = \left|1 - e^{i\theta}\right| = |1 - \cos\theta - i\sin\theta| = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2 - 2\cos\theta} \qquad \text{car } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2\left(1 - \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{\frac{4\left(1-\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{car } \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} = |z|e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$$

Donc

$$\arg(z) = \frac{\theta-\pi}{2}[2\pi]$$

3. La rotation r est de centre B d'affixe 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc

$$Z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - z_B) \Leftrightarrow Z' = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)(Z-2) + 2$$

$$\Leftrightarrow Z' = -i(Z-2) + 2$$

$$\Leftrightarrow Z' = -iZ + 2i + 2$$

4. Image du cercle $\mathcal{C}$ par r :

$$Z' = -iZ + 2i + 2 \Leftrightarrow Z' = -i\left(1 - e^{i\theta}\right) + 2i + 2$$

$$\Leftrightarrow Z' = -i + ie^{i\theta} + 2i + 2$$

$$\Leftrightarrow Z' = 2 + i + ie^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow Z' - (2+i) = ie^{i\theta}$$

On a :

$$|Z' - (2+i)| = \left|ie^{i\theta}\right| = 1$$

L'image par r du cercle $\mathcal{C}$ est :

Le cercle $\mathcal{C}'$ de centre le point d'affixe $2+i$ et de rayon 1

5. Image d'un point M de $\mathcal{C}$ par r :

$$Z' = -iZ + 2i + 2 \Leftrightarrow Z' = -i\left(1 - e^{i\theta}\right) + 2i + 2$$

$$\Leftrightarrow Z' = -i + ie^{i\theta} + 2i + 2$$

$$\Leftrightarrow Z' = ie^{i\theta} + i + 2$$

<u>Exercice 14</u> :

1. $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

C'est une équation du type $az^2 + bz + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{3}. \\ c = 1 \end{cases}$

On calcul Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 3 - 4 = -1 < 0$$

Donc

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$
$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

Donc

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3} - i}{2}; \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right\}$$

2. $\boldsymbol{z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}}$

<u>Calcul du module :</u>

On a : $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ donc $a^2 = \frac{3}{4}$ et $b^2 = \frac{1}{4}$

On en déduit que : $|z_1| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

<u>Calcul de l'argument :</u>

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$

On obtient :

$$\theta = \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

D'où

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}}$$

<u>Calcul du module :</u>

On a : $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ donc $a^2 = \frac{3}{4}$ et $b^2 = \frac{1}{4}$

On en déduit que : $|z_2| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

<u>Calcul de l'argument :</u>

On obtient le système suivant : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

On cherche λ tel que $\begin{cases} cos\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$

On obtient donc $\lambda = \frac{\pi}{6}$.
Comme $cos\theta$ est positif et $sin\theta$ est négatif, on obtient :

$$\theta = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

D'où

$$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

3. M_3 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc

$$z_3 - z_O = e^{\frac{2i\pi}{3}}(z_2 - z_O)$$

$$\Leftrightarrow z_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_3 = e^{\frac{4i\pi}{6} - i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_3 = e^{\frac{3i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_3 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

4. M_4 est l'image de M_2 par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ donc

$$z_4 = z_2 - \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_4 = e^{-i\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_4 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_4 = -i$$

Reconnaître un ensemble de points

Exercice 15 :

Dans la suite on nommera A, B, C les points d'affixes respectives $-2,\ 4i, -1+2i$

$|z+2| = |z-4i| \Leftrightarrow AM = BM$

Donc l'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[AB]$

$|z+1-2i| = 3 \Leftrightarrow CM = 3$

Donc l'ensemble recherché est le cercle de centre C et de rayon 3

$\arg(z-4i)=\frac{\pi}{3}\ mod\ \pi \Leftrightarrow (\vec{\imath};\ \overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{3}\ mod\ \pi$

Donc l'ensemble recherché est la droite (BM') privée du point B avec M' un point tel que $(\vec{\imath};\ \overrightarrow{BM'})=\frac{\pi}{3}\ mod\ 2\pi$

$\arg\left(\frac{z+2}{z+1-2i}\right)=\frac{\pi}{2}\ mod\ \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}\ mod\ \pi$

Donc l'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AC]$ privé des points A et C.

<u>Exercice 16</u> :

1. $\boldsymbol{|z|=2\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z-0|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-z_0|=2\sqrt{2}$

C'est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

2. $\boldsymbol{|z-1+i|=\frac{3}{2}} \Leftrightarrow |z-z_A|=\frac{3}{2}$ avec $z_A=1-i$

C'est le cercle de centre $A(1,-1)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

3. $\boldsymbol{|z-i|=|z+i|} \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B|$ avec $z_A=i$ et $z_B=-i$

C'est la médiatrice du segment $[AB]$, A et B étant symétriques, on obtient l'axe des abscisses

4. $\boldsymbol{|z-2+i|=|\bar{z}+3i|}$

Soit $z=x+iy$, on obtient :

$$|x+iy-2+i|=|x-iy+3i|$$

$$\Leftrightarrow |x-2+i(y+1)|=|x+i(-y+3)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(-y+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=x^2+(-y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+9$$

$$\Leftrightarrow 8y=4x+4$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

C'est la droite d'équation $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

5. $\boldsymbol{|z-3i|=5} \Leftrightarrow |z-z_A|=5$ avec $z_A=3i$

C'est le cercle de centre $A(0,3)$ et de rayon 5.

6. **$|\bar{z}+i|=2$**

Soit $z=x+iy$, on obtient :

$$|x-iy+i|=2$$

$$\Leftrightarrow |x+i(-y+1)|=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(-y+1)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow x^2+(-y+1)^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2^2$$

C'est le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 2.

7. **$|z-1-2i|=|z-7+2i|$** $\Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B|$ avec $z_A=1+2i$ et $z_B=7-2i$

C'est la médiatrice du segment $[AB]$

8. **$|-2iz+1-4i|=4$**

Soit $z=x+iy$, on obtient :

$$|-2i(x+iy)+1-4i|=4$$

$$\Leftrightarrow |-2ix+2y+1-4i|=4$$

$$\Leftrightarrow |2y+1+i(-2x-4)|=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2y+1)^2+(-2x-4)^2}=4$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)^2+(-2x-4)^2=4^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2+4y+1+4x^2+16x+\cancel{16}=\cancel{16}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+16x+4y^2+4y=-1$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+y^2+y=-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4=2^2$$

C'est le cercle de centre $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon 2.