Corrigés des exercices

Utiliser la formule des probas conditionnelles

Exercice 1 :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.7 = 0.2$$
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

Exercice 2 :

On recherche la probabilité d'obtenir un 6 sachant que l'on a obtenu un nombre pair.

$$P_{'obtenir\ un\ pair'}('obtenir\ un\ 6') = \frac{P(obtenir\ un\ 6 \cap obtenir\ un\ pair)}{P(obtenir\ un\ pair)}$$
$$= \frac{P(obtenir\ un\ 6) \times P(obtenir\ un\ pair)}{P(obtenir\ un\ pair)} = P('obtenir\ un6') = \frac{1}{6}$$

Remarque : ce sont des évènements indépendants !

Exercice 3 :

Probabilité de A :

On suppose que la probabilité de l'évènement F :'obtenir une fille' est la même que celle de l'évènement G :'obtenir un garçon', donc $\frac{1}{2}$

Les évènements sont indépendants, donc $P(A) = \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(on pouvait aussi déterminer le cardinal de Ω = {FF, FG, GF, GG})

Probabilité de B :

La probabilité que l'ainée soit une fille est celle que les parents aient eu deux filles ou une fille puis un garçon. Dès lors puisque ces évènements sont incompatibles, on $P(B) = \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Probabilité de C :

La probabilité que la famille ait au moins une fille est celle que les parents aient eu deux filles ou une fille puis un garçon ou un garçon puis une fille. Dès lors puisque ces évènements sont incompatibles, on $P(C) = \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Probabilité de D :

La probabilité que la benjamine soit une fille est celle que les parents aient eu deux filles ou un garçon puis une fille. Dès lors puisque ces évènements sont incompatibles, on $P(D) = \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Par suite,

On a $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1/2} = \frac{1}{4} x \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ puisque $A \subset A \cap B$

On a $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{3/4} = \frac{1}{4} x \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ puisque $A \subset A \cap C$

On a $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)}{1/2} = \frac{1}{4} x \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ puisque $A \subset A \cap D$

On a $P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A)}{1/4} = \frac{1}{4} x \frac{4}{1} = 1$ puisque $A \subset A \cap C$

Remarque : On peut vérifier un résultat de probabilité conditionnelle en recherchant ce que signifie la probabilité que l'on vient de déterminer. Par exemple, $P_A(C)$ est la probabilité que la famille ait au moins une fille sachant qu'elle a deux filles. On comprend dès lors mieux que la probabilité vaille 1 : c'est l'évènement certain.

Exercice 4 :

1. $P(A) + P(B) = 1$. Or, $P(A) = 2 \times P(B)$ donc $P(A) + \frac{P(A)}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$
2. $P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$
3. $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{2}{3} \times 0.05 + \frac{1}{3} \times 0.03 \approx 0.04$
4. $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} \approx \frac{0.03}{0.04} \approx 0.77$

Utiliser la formule des probas totales

Exercice 5 :

1. Puisque les tirages sont simultanés, ils sont indépendants et donc $P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Ainsi $P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

2. $P_A(B)$ est la probabilité d'obtenir un double 6 sachant que l'on a tiré deux dés normaux donc $P_A(B) = \frac{1}{36}$ et $P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A) = \frac{1}{36} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{81}$
3. $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = \frac{1}{36} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{36} \times \frac{5}{9} = \frac{19}{324}$

   (la proba $P_{\bar{A}}(B)$ est celle d'obtenir un double 6 sachant que l'on a tiré un dé normal et un dé spécial donc $\frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$)
4. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/81}{19/324} = \frac{4}{19}$

Exercice 6 :

Il y a 4 boules rouges dans U_1 donc si R est l'évènement 'obtenir une boule rouge', alors $P_{U_1}(R) = \frac{4}{7}$

1. $P(R) = P(U_1) \times P_{U_1}(R) + P(\overline{U_1}) \times P_{\overline{U_1}}(R)$

   Il y a équiprobabilité dans le choix des urnes donc $P(U_1) = P(\overline{U_1}) = \frac{1}{2}$

   De plus $P_{\overline{U_1}}(R) = P_{U_2}(R) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

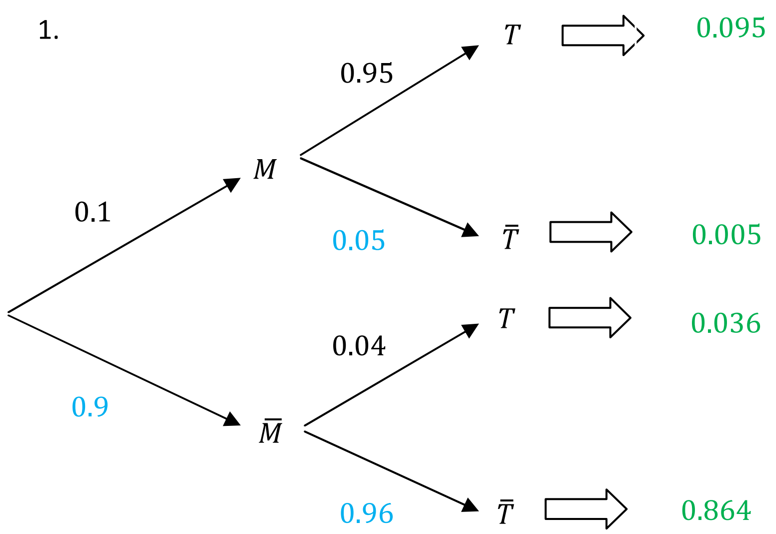
   Donc $P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{13}{21}$
2. On cherche $P_R(U_1) = \frac{P(R \cap U_1)}{P(R)} = \frac{2/7}{13/21}$ (en effet $P(R \cap U_1) = P_{U_1}(R) \times P(U_1) = \frac{2}{7}$)

   Et donc $P_R(U_1) = \frac{6}{13}$

Exercice 7 :

On pourra construire un arbre de probabilité : en noir les probabilités données en énoncé, en bleu celles déduites à l'aide de la formule $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et en vert celles calculées à l'aide de $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

1.



On extrait les résultats recherchés :

- $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0.095$
- $P(\bar{M} \cap T) = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) = 0.036$

2. La formule des probabilités totales nous donne :

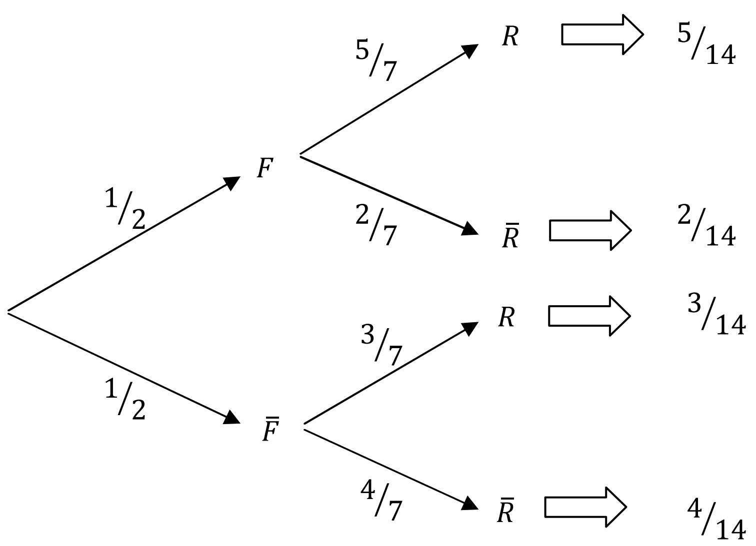
$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) = 0.095 + 0.036 = 0.131$$

3. L a formule de Bayes (probabilités conditionnelles) nous donne :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0.095}{0.131} = \frac{95}{131}$$
$$P_T(\bar{M}) = \frac{P(T \cap \bar{M})}{P(T)} = \frac{0.036}{0.131} = \frac{36}{131}$$

<u>Exercice 8</u> :

1. $P(F) = \frac{1}{2}$
2. $P_F(R) = \frac{5}{7}$: en effet cette probabilité désigne la proba de tirer une boule rouge sachant que l'on a obtenu face. D'après les données de l'énoncé si l'on obtient face, on tire une boule dans U_2. Or il y a 5 boules rouges dans U_2 sur 7 boules au total : d'où le résultat
   $P_F(\bar{R}) = \frac{2}{7}$: de la même manière, il s'agit ici de la proba de tirer une boule ''non rouge'' (donc bleue) dans U_2.
3. Voici l'arbre en question :



4. La formule des probabilités totales donne :

$$P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap \bar{F}) = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

5.

$$P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)} = \frac{5/14}{8/14} = \frac{5}{8}$$

Utiliser un arbre de probabilité

Exercice 9 :

Probabilité de A :

Dimanche : il a fait sec par hypothèse d'où deux possibilités pour lundi : sec ou humide

$$\text{Lundi : } \begin{cases} \text{sec de proba } 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ \text{pluie de proba } \frac{1}{6} \end{cases}$$

Remarque : il s'agit bien là de probabilités conditionnelles : la probabilité qu'il fasse sec ou humide lundi sachant qu'il a fait sec dimanche

Mardi : soit il a fait sec lundi et alors les probabilités conditionnelles sont les mêmes que pour lundi

$$\text{Soit il a fait humide et alors : Mardi : } \begin{cases} \text{sec de proba } \frac{2}{3} \\ \text{pluie de proba } \frac{1}{3} \end{cases}$$

Au final, sachant qu'il a fait sec dimanche :

$$\begin{cases} \text{sec lundi et mardi : } \frac{5}{6} \text{ x } \frac{5}{6} = \frac{25}{36} \\ \text{pluie lundi et sec mardi : } \frac{1}{6} \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \\ \text{sec lundi et pluie mardi : } \frac{5}{6} \text{ x } \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \\ \text{pluie lundi et pluie mardi : } \frac{1}{6} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

(on peut vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1)

Le cas nous intéressant étant le temps sec de mardi, on peut se retrouver dans le cas sec/sec ou pluie/sec donc $P(A) = \frac{25}{36} + \frac{1}{9} = \frac{29}{36}$

Probabilité de B :

Le principe est le même que précédemment :

On a les éventualités depuis dimanche : sec/sec/sec de probabilité $\frac{5}{6}$ x $\frac{5}{6}$x $\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

Pluie/sec/sec de probabilité $\frac{1}{6}$ x $\frac{2}{3}$x $\frac{5}{6} = \frac{10}{108} = \frac{5}{54}$

sec/pluie/sec de probabilité $\frac{5}{6}$ x $\frac{1}{6}$x $\frac{2}{3} = \frac{10}{108} = \frac{5}{54}$

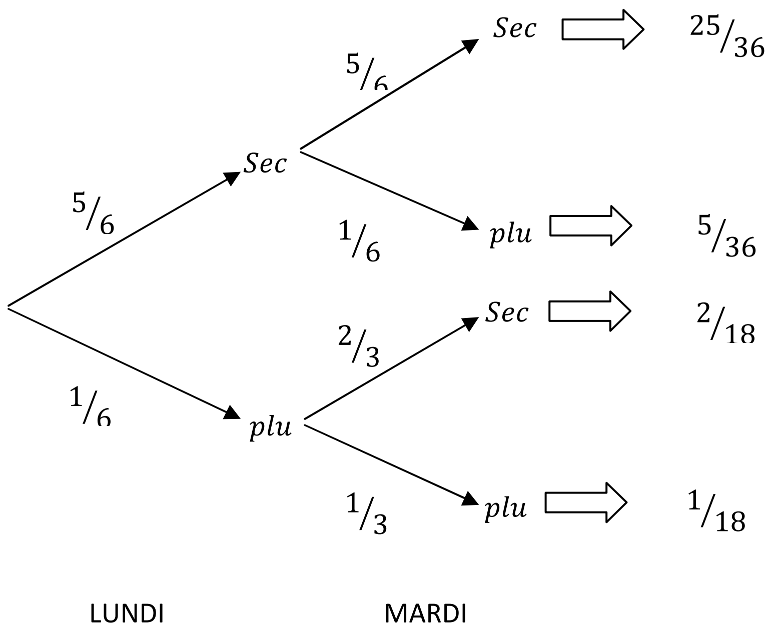
pluie/pluie/sec de probabilité $\frac{1}{6}$ x $\frac{1}{3}$x $\frac{2}{3} = \frac{2}{108} = \frac{1}{54}$

Ainsi $P(\bar{B}) = \frac{125}{216} + \frac{5}{54} + \frac{5}{54} + \frac{1}{54} = \frac{166}{216} = \frac{83}{108}$

D'où $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{83}{108} = \frac{25}{108}$

Remarque : Il était tout à fait possible ici d'utiliser un arbre de probabilité.

Pour déterminer la probabilité de A on aurait utilisé l'arbre suivant :



<u>Exercice 10</u> :

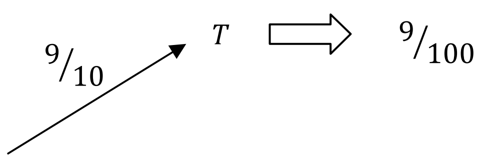
Soit M l'évènement 'l'individu est malade'

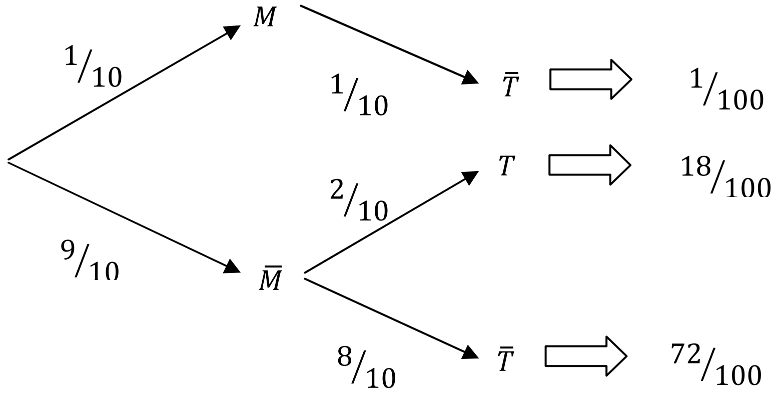
Soit T l'évènement 'le test est positif'

Commençons par traduire l'énoncé en données probabilistes.

On donne $P_M(T) = 0{,}9$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0{,}8$ et enfin $P(M) = 0{,}1$

1. On pourra utiliser un arbre de probabilité pour représenter les données





2. On a $P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$
   D'après ce qui précède, on déduit $P(\bar{M}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ et $P_{\bar{M}}(T) = 1 - P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
   cela donne On a $P(T) = 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}27$

<u>Exercice 11</u> :

Notons E l'évènement 'le renard est enragé' et A l'évènement 'le renard a été abattu'

Soit q la probabilité qu'un renard soit enragé. On aura alors $q = P(E) = \frac{1}{4}$ et donc $\bar{q} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Soit p la probabilité qu'un renard soit abattu. Cette probabilité est inconnue.

1. On donne $P_A(E) = \frac{1}{2}$ et donc $P_{\bar{A}}(E) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   On cherche la probabilité qu'un renard n'ait pas été abattu sachant qu'il était enragé, c'est-à-dire $P_E(\bar{A}) = \frac{P(E \cap \bar{A})}{P(E)} = \frac{P(E \cap \bar{A})}{1/4}$
   D'autre part $P(E \cap \bar{A}) = P_{\bar{A}}(E) \times P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times (1 - p)$
   Donc au final $P_E(\bar{A}) = \frac{\frac{1}{2} \times (1 - p)}{1/4} = 2 \times (1 - p) = 2 - 2p$
2. On souhaite que $P_E(\bar{A}) \leq 0{,}15$, c'est-à-dire $2 - 2\,p \leq 0{,}15$ ou encore $p \geq \frac{1{,}85}{2}$
   Donc la plus petite valeur de p est $0{,}925$

Exercice 12 :

La probabilité que cet individu contracte au moins l'une des deux maladies en un an est la probabilité qu'il contracte l'une des deux maladies ou les deux. Il s'agit du contraire de n'en attraper aucune ! Ainsi la probabilité recherchée vaut $1-(1-0.4)\times(1-0.2)=1-0.6\times 0.8=1-0.48=0.52$

Autre méthode : (moins astucieuse)

Attraper l'une ou l'autre : $0.4\times 0.8+0.6\times 0.2=0.44$

Attraper les deux : $0.4\times 0.2=0.08$

Et donc attraper au moins l'une deux : $0.44+0.08=0.52$

Exercice 13 :

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

Les 4 issues possibles sont $\{(PP),(PF),(FP),(FF)\}$ donc $card(\Omega)=4$ et $card(C)=2$ d'où

$$P(C)=\frac{1}{2}$$

Par ailleurs,

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=0$$

Ces deux évènements ne sont donc pas indépendants : ils sont incompatibles

$$P(A)\times P(C)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap C)=\frac{card('PF')}{card(\Omega)}=\frac{1}{4}$$

Ces deux évènements sont donc bien indépendants.

$$P(B)\times P(C)=\frac{1}{4}$$

$$P(B\cap C)=\frac{card('FP')}{card(\Omega)}=\frac{1}{4}$$

Ces deux évènements sont donc bien indépendants.

Exercice 14 :

1. On tire au hasard 4 personnes parmi 12 donc $card(\Omega) = \binom{12}{4} = 495$
   On souhaite 4 femmes parmi 6 donc $card(A) = \binom{6}{4} = 15$ et $P(A) = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$
   On souhaite que monsieur Dupont fasse partie du tirage accompagné de 3 autres personnes parmi les 11 restantes donc $card(B) = \binom{1}{1} \times \binom{11}{3} = 165$ et$P(B) = \frac{165}{495} = \frac{1}{3}$
   Par ailleurs, $A \cap B$ est décrit par le nombre de quadruplets contenant à la fois monsieur Dupont et aucun homme : c'est impossible ! Ainsi $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cap B) = 0$: les évènements A et B sont incompatibles.
   Ils ne peuvent donc être indépendants.
2. On tire au hasard 4 personnes parmi 12 donc $card(\Omega) = \binom{12}{4} = 495$
   On souhaite 2 couples parmi 6 donc $card(C) = \binom{6}{2} = 15$ et $P(C) = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$
   On souhaite que le couple Dupont fasse partie du tirage accompagné d'un autre couples parmi les 5 restants donc $card(B \cap C) = \binom{1}{1} \times \binom{5}{1} = 5$ et $P(B \cap C) = \frac{5}{495} = \frac{1}{99}$
   Par ailleurs, $P(B) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{33} = \frac{1}{99}$ donc $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$. On en déduit que les évènements B et C sont indépendants.

Exercice 15 :

1. Les évènements ne sont pas incompatibles. En effet, leur intersection n'est pas vide. En l'occurrence, obtenir un 5 et un 4 vérifie les deux évènements. Plus formellement, $A \cap B = \{(5,4); (4,5)\}$ et donc $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{16} \neq 0$
2. <u>Probabilité de A</u> :
   $A = \{(5,4); (4,5); (3,6); (6,3)\}$ donc $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{8}$
   <u>Probabilité de B</u> :
   $$B = \{(1,4); (2,4); (3,4); (4,4); (5,4); (6,4); (4,1); (4,2); (4;3); (4,5); (4,6)\}$$
   Donc $P(B) = \frac{11}{36}$
   Au final $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{11}{36} = \frac{11}{288}$
   Or $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{16}{288} \neq \frac{11}{288}$

Donc les évènements A et B ne sont pas indépendants

Problème 1 :

1. Partons du principe qu'il n'existe qu'un seul bon code. Combien peut-on composer de codes au total ?
   - 2 chiffres distincts (donc 'sans remise') et dans l'ordre : il y a $A_6^2 = 30$ possibilités

   (autre méthode : on a 36 couples de deux chiffres possibles sans distinction de valeur. Si on leur enlève les 6 couples tels que $(1\,;1)$, $(2\,;2)$…on obtient bien le même résultat : 30)
   - 2 lettres pouvant être identiques (donc 'avec remise') : il y a $4^2 = 16$ possibilités

   Pour composer le code en entier on a besoin de 2 chiffres ET de 2 lettres, donc il y a $30 \times 16 = 180$ codes possibles.

   La probabilité de trouver le bon code en un essai est donc de $\frac{1}{180}$
2. On sait que les deux premiers chiffres sont pairs, donc à choisir entre 2, 4 et 6. Le nombre de possibilités est $A_3^2 = 6$

   Il y a le même nombre de choix pour les lettres. La probabilité de trouver le code dans ces conditions est ainsi de $\frac{1}{6\times16} = \frac{1}{96}$
3. Le nombre de choix pour les chiffres reste le même : 6

   Le nombre de choix pour les lettres devient 4 (on a le choix entre AA, BB, CC et DD).

   La probabilité de trouver le code dans ces conditions est ainsi de $\frac{1}{6\times4} = \frac{1}{24}$

Problème 2 :

Soient p_1, p_2, p_3les probabilités d'impact respectives de chacun des 3 archers.

On cherche la probabilité qu'au moins l'un des trois touche la cible. Il est ici plus astucieux d'étudier le complémentaire 'aucun ne touche la cible'.

La probabilité de cet évènement contraire est donc $(1-p_1)\times(1-p_2)\times(1-p_3)$ puisque les tirs sont indépendants. Au final la probabilité recherchée est donc $1-\ (1-p_1)\times(1-p_2)\times(1-p_3)$.

Application numérique : $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}3$

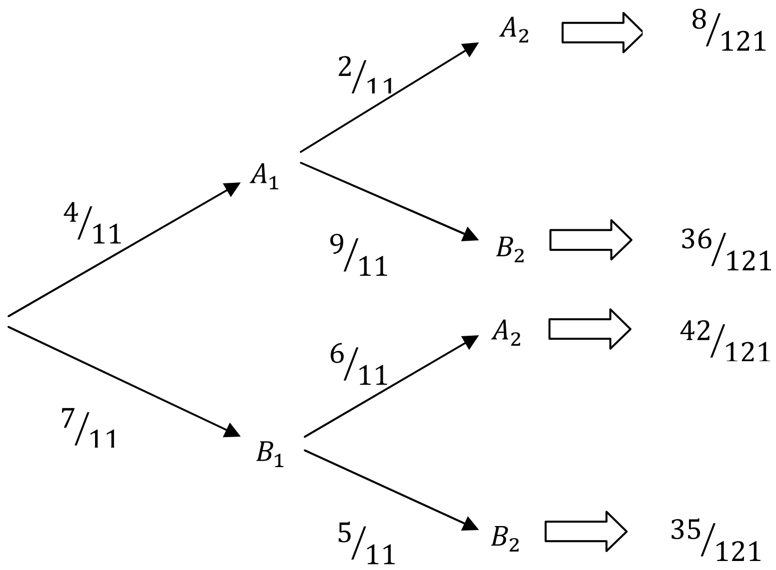
Dans ces conditions, la probabilité qu'au moins l'un des trois touche la cible est donc de $1-(1-0{,}1)$ x $(1-0{,}2)$ x $(1-0{,}3) = 1-0{,}9$ x $0{,}8$ x $0{,}7 = 1-0{,}504 = 0{,}496$.

Problème 3 :

1.
   a. $P(A_1) = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$ et $P(B_1) = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$

   b. $P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$, $P_{B_1}(A_2) = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$ et $P(A_1 \cap A_2) = P_{A_1}(A_2) \times\ P(A_1) = \frac{2}{11} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{121}$

c.



2.

a. X peut prendre les valeurs 14, 16 et 18

$$P(X = 14) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{8}{121}$$

$$P(X = 16) = P((A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) = \frac{36}{121} + \frac{42}{121} = \frac{78}{121}$$

$$P(X = 14) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{35}{121}$$

Dès lors, sa loi de probabilité est :

x_i	14	16	18
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{121}$	$\frac{78}{121}$	$\frac{35}{121}$

b. Déterminez l'espérance mathématique de X et donnez une interprétation du résultat.

$$E(X) = 14 \times \frac{8}{121} + 16 \times \frac{78}{121} + 18 \times \frac{35}{121} = \frac{1990}{121} \approx 16.45$$

Ce nombre signifie qu'un individu pris au hasard dans ce groupe aura payé en moyenne 16.45 euros au terme des deux semaines.