Corrigés des exercices

Manipuler les puissances de e

Exercice 1 :

$$\frac{2e^2}{\sqrt{e}} = \frac{2e^2}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^{2-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3e^{-3}}{e \times (e^{-2})} = \frac{3e^{-3}}{e^{-1}} = 3e^{-3-(-1)} = 3e^{-2}$$

Exercice 2 :

$$\frac{\sqrt{e}}{e \times e^{-2}} = \frac{e^{1/2}}{e^{1-2}} = e^{\frac{1}{2}-(1-2)} = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3e^{-3}}{(\sqrt{e})^3} = \frac{3e^{-3}}{e^{\frac{3}{2}}} = 3e^{-3-\frac{3}{2}} = 3e^{-\frac{9}{2}}$$

$$-5e^{-4} \times (\sqrt{e})^3 \times 2e^2 = -10 \times e^{\frac{3}{2}} \times e^2 = -10 \times e^{\frac{7}{2}}$$

Résoudre une équation

Exercice 3 :

$$e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln 3} \Leftrightarrow x = \ln 3$$

$$e^{x-2} = 9 \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 9} \Leftrightarrow x - 2 = \ln 9 \Leftrightarrow x = \ln 9 + 2$$

Exercice 4 :

$$e^{5x} = 1 \Leftrightarrow e^{5x} = e^0 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$e^x = e^{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow x = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x^2 = 1 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5X^2 - 4X - 1 = 0$ avec le changement de variable $X = e^x$

D'où $X_1 = -\frac{1}{5}$ et $X_2 = 1$ d'où $x = \ln 1 = 0$ (la valeur $\ln -\frac{1}{5}$ n'existe pas)

<u>Exercice 5</u> :

$$e^{\frac{5x+3}{x-4}} = e^{x+1} \Leftrightarrow \frac{5x+3}{x-4} = x+1 \text{ et } x-4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 5x+3 = (x+1)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 5x+3 = x^2-3x-4$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x-7=0$$

$\Delta = b^2-4ac = 64+28 = 92 > 0$ donc il y a deux solutions

$$\text{d'où } \begin{cases} X_1 = \dfrac{8-\sqrt{92}}{2} = 4-\sqrt{23} \\ X_2 = \dfrac{8+\sqrt{92}}{2} = 4+\sqrt{23} \end{cases}$$

$$S = \{4-\sqrt{23}; 4+\sqrt{23}\}$$

Résoudre une inéquation

<u>Exercice 6</u> :

$e^{x^3} \geq (e^2)^4 \Leftrightarrow e^{x^3} \geq e^8 \Leftrightarrow x^3 \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x \geq 2$

$xe^x \geq 0$

La fonction e^x est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi le signe de xe^x ne dépend que du signe de x.

On en conclut que $xe^x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Remarque : on aurait pu également faire un tableau de signes de la fonction xe^x

<u>Exercice 7</u> :

$xe^x \leq 0$: on peut faire un tableau de signes

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
e^x	+		+
Signe de xe^x	-	0	+

Ainsi $xe^x \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0]$

$e^{1-x^2} \leq 0$ n'a aucune solution puisque une exponentielle est toujours positive

$e^{x^2-x} \leq e \Leftrightarrow x^2 - x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

(on pouvait faire un nouveau tableau de signes ou penser au signe de a : ici positif donc le moins est à l'intérieur des racines)

Calculer une dérivée

Exercice 8 :

La dérivée de la fonction $\frac{e^x}{x}$ est

$$\frac{e^x - xe^x}{x^2} = \frac{e^x(1-x)}{x^2}$$

Remarque : La factorisation du numérateur n'était ici pas obligatoire, mais prenez l'habitude de factoriser au maximum vos dérivées, dont le but sera à terme d'étudier le signe.

La dérivée de la fonction $(3-2x)e^{2x+1}$ est

$$-2e^{2x+1} + (3-2x) \times 2e^{2x+1}$$

$$= e^{2x+1}(4-2x)$$

La dérivée de la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ est

$$-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

La dérivée de la fonction $\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$ est

$$\frac{3e^{3x}(e^{3x}+1)-3e^{3x}(e^{3x}-1)}{(e^{3x}+1)^2}=\frac{6e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$$

Exercice 9 :

$(xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$((3-2x)e^{2x+1})' = -2e^{2x+1} + (3-2x)\times 2\times e^{2x+1} = e^{2x+1}(-2+6-4x) = 4(1-x)e^{2x+1}$

$\left(\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}\right)' = \frac{3e^{3x}(e^{3x}+1)-3e^{3x}(e^{3x}-1)}{(e^{3x}+1)^2} = \frac{6e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

Calculer une limite

Exercice 10 :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+1}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-e^{-x}} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{1-2x}+2x-3 = \lim_{x\to-\infty} e^{1-2x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{2x}-2e^{3x}}{e^{2x}-e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2e^{3x}}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} -2e^x = -\infty$$

Exercice 11 :

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-2e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x-2) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{e^x(1-\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

Problème

$f(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2. $f'(x) = e^x - 1$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ d'où :
   f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ,+\infty[$ et f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ,0[$ et son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0$
4. Cela revient à étudier le signe de $f(x) - y = f(x)$. On constate d'après le tableau de variations que le minimum de la fonction est 0. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
   On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{C}$ est au dessus de T et que pour $x = 0$, $\mathcal{C}$ et T se coupent.
5. Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\mathcal{C}$ n'admet aucune asymptote horizontale.
   De plus, la fonction n'admet aucune valeur interdite donc $\mathcal{C}$ n'admet pas d'asymptote verticale.
   En revanche si l'on pose $y = -x - 1$ on obtient $f(x) - y = e^x$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = 0$ (faux en $+\infty$)
   On en déduit que la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.