Test limites - Corrigé

Première S

Calculer une limite en l'infini

Exercice 1 :

- Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 - x^2 - 5x + 1$$

Or,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -5x = -\infty \end{cases}$$

Donc :

$\lim_{x\to+\infty} 3x^3 - x^2 - 5x + 1$ est une forme indéterminée du type $'+\infty - \infty'$

Mais on a :

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3 - x^2 - 5x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 - x^2 - 5x + 1$$

Or,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -5x = +\infty \end{cases}$$

Donc :

$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - x^2 - 5x + 1$ est une forme indéterminée du type $' + \infty - \infty'$

Mais on a :

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \to -\infty} x^3 (3 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3})$$

Et

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{5}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 (3 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- <u>Asymptotes de f</u>

La courbe de f n'admet aucune asymptote, ni horizontale (les limites en l'infini ne sont pas finies), ni verticale (la fonction n'admet aucune valeur interdite), ni oblique (il est impossible de trouver une droite $y = ax + b$ telle que $f(x) - y$ tende vers 0)

- <u>Limite de g en $+\infty$</u>

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{x + 5}$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} 2x - 3 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} x + 5 = +\infty \end{cases}$$

Donc :

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x+5}$ est une forme indéterminée du type $' \frac{+\infty}{+\infty} '$

Mais on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{5}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x}}$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x+5} = = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$$

- <u>Limite de g en $-\infty$</u>

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} = 2$$

- <u>Asymptotes de g</u>

La fonction g admet 2 pour limite en l'infini donc sa courbe représentative possède une asymptote horizontale d'équation $y = 2$. Elle n'admet par conséquent pas d'asymptote oblique.

Remarque : Ce n'était pas demandé ici mais la fonction g admet également une valeur interdite en $x = -5$ donc sa courbe représentative possède une asymptote verticale d'équation $x = -5$

<u>Exercice 2</u> :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 2x + 3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - x - 1 = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-4}{x\sqrt{\frac{1}{x}+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Calculer une limite en un point

<u>Exercice 3</u> :

Notons tout d'abord que $-x^2 + 3x + 10 = -(x-5)(x+2)$: on constate que -2 et 5 sont bien des valeurs interdites pour f.

- <u>Limites de f en -2</u>

Pour $x < -2$ et proche de -2, on a $x - 5 < 0$, $x + 2 < 0$ donc $-(x-5)(x+2) < 0$

De plus $x - 1 < 0$

Ainsi, pour $x < -2$ et proche de -2, $\frac{x-1}{-(x-5)(x+2)} > 0$

On en déduit que $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$

Pour $x > -2$ et proche de -2, on a $x - 5 < 0$, $x + 2 > 0$ donc $-(x-5)(x+2) > 0$

De plus $x - 1 < 0$

Ainsi, pour $x > -2$ et proche de -2, $\frac{x-1}{-(x-5)(x+2)} < 0$

On en déduit que $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

- <u>Limites de f en 5</u>

Pour $x < 5$ et proche de 5, on a $x - 5 < 0$, $x + 2 > 0$ donc $-(x-5)(x+2) > 0$

De plus $x - 1 > 0$

Ainsi, pour $x < 5$ et proche de 5, $\frac{x-1}{-(x-5)(x+2)} > 0$

On en déduit que $\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x) = +\infty$

Pour $x > 5$ et proche de 5, on a $x - 5 > 0$, $x + 2 > 0$ donc $-(x-5)(x+2) < 0$

De plus $x - 1 > 0$

Ainsi, pour $x > 5$ et proche de 5, $\frac{x-1}{-(x-5)(x+2)} < 0$

On en déduit que $\lim_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = -\infty$

Graphiquement, on en déduit que la courbe de la fonction f admet deux asymptotes verticales, d'équations $x = -2$ et $x = 5$

Exercice 4 :

$\lim_{x\to 0} x^2(x-2)+4 = 0\times(0-2)+4 = 4$

$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \frac{1}{2x^2-7x-4} = -\infty$ car $2x^2-7x-4<0$ quand $x<4$ est proche de 4

$\lim_{\substack{x\to \frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} -1+\frac{4}{(2x-3)^2} = +\infty$ car $(2x-3)^2>0$ quand $x<\frac{3}{2}$ est proche de $\frac{3}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-2)}{(x+3)} = -\frac{1}{4}$$

Déterminer l'équation d'une asymptote

Exercice 5 :

- x^2+x+2 : pas de valeur interdite donc pas d'asymptote verticale

De plus, $\lim_{x\to-\infty} x^2+x+2 = \lim_{x\to+\infty} x^2+x+2 = +\infty$ donc pas d'asymptote horizontale

On ne peut trouver de droite de la forme $y=ax+b$ telle que $\lim_{x\to\pm\infty} x^2+x+2-(ax+b)=0$ donc la fonction n'admet pas non plus d'asymptote oblique.

Cette fonction n'admet donc aucune asymptote.

- $\frac{1}{x+2}$ admet une valeur interdite : -2 donc $x=-2$ est asymptote verticale à cette fonction

De plus $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ donc $y=0$ est asymptote horizontale à la fonction

Une même fonction ne pouvant admettre à la fois une asymptote verticale et une oblique, on en déduit qu'il n'y a pas dans ce cas d'asymptote oblique.

- $\frac{5}{2x-3}+7$ admet une valeur interdite : $\frac{3}{2}$ donc $x=\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à cette fonction

De plus $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{2x-3}+7 = 7$ donc $y=7$ est asymptote horizontale à la fonction

Pas d'asymptote oblique pour la même raison que précédemment.

- $x-1+\frac{1}{2x+1}$ admet une valeur interdite : $-\frac{1}{2}$ donc $x=-\frac{1}{2}$ est asymptote verticale à cette fonction

  De plus $\lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{1}{2x+1} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x-1+\frac{1}{2x+1} = -\infty$ donc la fonction n'admet pas d'asymptote horizontale.

En revanche si l'on pose $y = x - 1$ on a $x - 1 + \frac{1}{2x+1} - y = \frac{1}{2x+1}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$ donc $y = x - 1$ est asymptote oblique à la fonction

Exercice 6 :

$$f(x) - y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - x = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - \frac{x(x-2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \frac{1}{x - 2}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Calculer la limite d'une fonction composée

Exercice 7 :

Soit $f(x) = \sqrt{2x+3} = (g \circ h)(x)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = 2x + 3$

On a $\lim_{x\to+\infty} 2x + 3 = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3} = +\infty$

Exercice 8 :

- $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

De plus $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}$

De plus, $\lim_{x\to-\frac{3}{2}} x^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+1}{1-2x}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Problème 1 :

1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$

   $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3$

   $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$

   $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$

3. La fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une horizontale d'équation $y = 3$

Problème 2 :

1. $ax + b + \frac{c}{x-5} = \frac{(ax+b)(x-5)+c}{x-5} = \frac{ax^2+bx-5ax-5b+c}{x-5}$

   D'où par identification $\begin{cases} a = 2 \\ b - 5a = -11 \\ -5b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{cases}$

   Donc $f(x) = 2x - 1 - \frac{4}{x-5}$

2. $\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 - \frac{4}{x-5} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

   $\lim_{x\to-\infty} 2x - 1 - \frac{4}{x-5} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

   $\lim_{\substack{x\to5\\x<5}} 2x - 1 - \frac{4}{x-5} = +\infty$

   $\lim_{\substack{x\to5\\x>5}} 2x - 1 - \frac{4}{x-5} = -\infty$

3. La fonction f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 5$ et pas d'asymptote horizontale. En revanche si l'on pose $y = 2x - 1$ on a $2x - 1 - \frac{4}{x-5} - y = -\frac{4}{x-5}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4}{x-5} = 0$ donc $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la fonction

Problème 3 :

1.

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax(2x-1) + b(2x-1) + c}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2ax^2 - ax + 2bx - b + c}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2ax^2 + (-a + 2b)x - b + c}{2x - 1}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ -a + 2b = 7 \\ -b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Et donc,

$$f(x) = -x + 3 + \frac{2}{2x - 1}$$

2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim_{x \to +\infty} -x + 3 + \frac{2}{2x - 1} - x + 3 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2x}$$
$$= 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty} -x + 3 + \frac{2}{2x - 1} - x + 3 = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{2x}$$
$$= 0^-$$

On en déduit que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Il faut étudier le signe de $f(x) - y = \frac{2}{2x-1}$

- $2 > 0$
- On résout $2x - 1 = 0$

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2		$+$		$+$	
$2x - 1$		$-$	0	$+$	
$\frac{2}{2x - 1}$		$-$	$\|$	$+$	

On obtient donc que :

Sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, la courbe est en dessous de l'asymptote.

Sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, la courbe est au dessus de l'asymptote.