Corrigés des exercices

Utiliser les suites arithmétiques

Exercice 1 :

1. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique : elle est donc de la forme $U_n = U_1 + (n-1)\times r$
   On peut donc écrire $U_{100} = U_1 + (n-1)\times r$, c'est-à-dire $38 = 5 + (100-1)\times r$
   D'où $38 = 5 + 99\times r$ et donc $r = \frac{38-5}{99} = \frac{1}{3}$
   Par suite, on aura $U_n = 5 + (n-1)\times\frac{1}{3} = \frac{14}{3} + \frac{1}{3}n$
2. On a
   $$S = U_1 + U_2 + \cdots + U_{100} = \sum_{k=1}^{100} U_k$$
   Or dans le cas d'une suite arithmétique on sait que
   $$S = \frac{(1\text{er terme} + \text{dernier terme})\times\ \text{nb de termes}}{2}$$
   Donc
   $$S = \frac{(U_1 + U_{100})\times\ 100}{2} = \frac{(5+38)\times\ 100}{2} = 2150$$

Exercice 2 :

1. On veut calculer la somme $1+2+3+\cdots+1000$. Il s'agit de la somme des 1000 premiers termes de la suite arithmétique $U_{n+1} = U_n + 1$, avec $U_1 = 1$
   Ainsi
   $$S = \frac{(1\text{er terme} + \text{dernier terme})\times\ \text{nb de termes}}{2} = \frac{(1+1000)\times 1000}{2} = 500500$$
2. On veut calculer la somme $1+3+5+\cdots+999$. Il s'agit de la somme des 500 premiers termes de la suite arithmétique $U_{n+1} = U_n + 2$, avec $U_1 = 1$
   Ainsi
   $$S = \frac{(1\text{er terme} + \text{dernier terme})\times\ \text{nb de termes}}{2} = \frac{(1+999)\times 500}{2} = 250000$$

Exercice 3 :

- On peut écrire $U_n = U_0 + nr$ donc $U_0 = U_n - nr = U_{100} - 100\times 8 = 650 - 800 = -150$

- La somme d'une suite arithmétique est donnée par la relation $(nb\ termes)\times\frac{1er\ terme+dernier\ terme}{2}$ d'où $1+2+3+\cdots+998+999 = 999\times\frac{1+999}{2} = 999\times 500 = 499500$
- $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}$ donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

Utillser les suites géométriques

Exercice 4 :

1. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique : elle est donc de la forme $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
   On a ainsi $U_{11} = U_1 \times 3^{11-1} = 729$
   Au final on obtient $U_1 = \frac{729}{3^{10}} = \frac{1}{81}$
2. Dans le cas d'une suite arithmétique on a
$$S = 1\text{er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$$
   Donc
$$S = U_1 \times \frac{1-3^{11}}{1-3} = \frac{1}{81} \times \frac{1-3^{11}}{-2} = \frac{88573}{81}$$

Exercice 5 :

- On peut écrire $U_n = U_0 \times q^n$ donc $U_0 = \frac{U_n}{q^n} = \frac{U_5}{(-2)^5} = \frac{16}{-32} = -\frac{1}{2}$
- La somme d'une suite géométrique est donnée par $premier\ terme \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$

  La suite contient 39 termes et sa raison est $\frac{1}{2}$ donc la somme recherchée est $1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{39}}{1-\frac{1}{2}} =$
  $\frac{1-(\frac{1}{2})^{39}}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{39}\right) = 2 - \frac{1}{2^{38}}$
-
  1. *1ère solution* : il paiera le deuxième mois $200 + 5 = 205$ euros et le troisième $200 + 5 + 5 = 210$ euros
     2ème solution : : il paiera le deuxième mois $200 + 200 \times 0.02 = 204$ euros et pour le troisième $204 + 204 \times 0.02 = 208.08$ euros
  2. Il faut ici écrire la suite correspondant à chacun des contrats
     1ère solution : on **ajoute** 5 euros chaque mois : il s'agit d'une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 200. On peut donc écrire $U_n = U_0 + n \times r$ et donc $U_{36} = 200 + 36 \times 5 = 380$ euros
     2ème solution : on **multiplie** par 1.02 chaque mois : il s'agit ici d'une suite géométrique de raison 1.02 et de premier terme 200. On peut donc écrire $V_n = V_0 \times q^n$ et donc $V_{36} = 200 \times 1.02^{36} = 407.98$
  3. Il s'agit ici de calculer la somme de l'ensemble des loyers payés durant 3 ans pour chacun des deux baux.
     1ère solution : la suite est arithmétique de raison 5 et de premier terme 200.
     Ainsi
$$S = \frac{(1\text{er terme} + \text{dernier terme}) \times \text{ nb de termes}}{2} = \frac{(200+380) \times 36}{2} = 10440$$

     2ème solution : la suite est géométrique de raison 1.02 et de premier terme 200
     Ainsi

$$S = 1\text{er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}} = 200 \times \frac{1 - 1.02^{36}}{1 - 1.02} = 10398.87$$

La solution la moins onéreuse est donc la deuxième solution.

Etudier le sens de variation d'une suite

Exercice 6 :

- On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 > 0$: la suite est donc strictement croissante.

- Soit la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$: on va étudier ses variations sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ or $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle. On en déduit que la suite est strictement croissante pour $n \geq 1$

- On va étudier le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{(\frac{1}{3})^n} = (\frac{1}{3})^{n+1-n} = \frac{1}{3} < 1$: la suite est donc strictement décroissante

Problèmes

Problème 1 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

1. On a $U_1 = \frac{1}{2}U_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} = -1$

   Et $U_2 = \frac{1}{2}U_1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times (-1) - \frac{3}{2} = -2$
2. On a la quotient :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} + 3}{U_n + 3} = \frac{\frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2} + 3}{U_n + 3} = \frac{\frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2}}{U_n + 3} = \frac{\frac{1}{2}(U_n + 3)}{U_n + 3} = \frac{1}{2}$$

   La suite est bien géométrique, de raison $\frac{1}{2}$
3. Puisque la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, on a $V_n = V_0 \times q^n = (U_0 + 3) \times (\frac{1}{2})^n = 4 \times (\frac{1}{2})^n$

   Par suite, puisque $V_n = U_n + 3$, on a $U_n = V_n - 3 = 4 \times (\frac{1}{2})^n - 3$
4. $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{4\times(\frac{1}{2})^n}{4\times(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{2} < 1$: la suite (V_n) est donc décroissante

$U_{n+1} - U_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n+1} - 3 - \left(4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\right) = 4 \times (\frac{1}{2})^{n+1} - 4 \times (\frac{1}{2})^n = 4 \times$ $(\frac{1}{2})^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -2 \times (\frac{1}{2})^n < 0$: la suite (U_n) est donc décroissante

5. On cherche à calculer $\sum_{k=0}^{10} U_k$

$$\sum_{k=0}^{10} U_k = \sum_{k=0}^{10} (4 \times (\frac{1}{2})^{k+1} - 3) = \sum_{k=0}^{10} 4 \times (\frac{1}{2})^{k+1} + \sum_{k=0}^{10} (-3) = 4 \sum_{k=0}^{10} (\frac{1}{2})^{k+1} + (-3) \sum_{k=0}^{10} 1$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{11} (\frac{1}{2})^k - 3 \times 11 = 4 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{11}}{1 - \frac{1}{2}} - 33 = 8 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right) - 33$$

$$= -\frac{51175}{2048}$$

Problème 2 :

1. On a par hypothèse

$$U_1 = \frac{U_0}{2U_0 + 1} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{2U_1 + 1} = \frac{1/3}{2 \times 1/3 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$U_3 = \frac{U_2}{2U_2 + 1} = \frac{1/5}{2 \times 1/5 + 1} = \frac{1}{7}$$

2.
   a. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il faut prouver que la quantité $U_{n+1} - U_n$ est indépendante de n

   Ici,

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\frac{U_n}{2U_n + 1}} - \frac{1}{U_n}$$

   D'où

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{2U_n + 1 - 1}{U_n} = \frac{2U_n}{U_n} = 2$$

   On en déduit que la suite (V_n) est bien arithmétique, de raison 2.

   b. On en déduit par utilisation directe de formule que puisque (V_n) est arithmétique, elle peut s'écrire $V_n = V_0 + n \times r = \frac{1}{U_0} + n \times 2 = 1 + 2n$

   Il faut tout d'abord exprimer U_n en fonction de V_n. Puisque l'on a $V_n = \frac{1}{U_n}$ on aura nécessairement

$$U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{1 + 2n}$$

Problème 3 :

1. Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il faut prouver que la quantité $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est indépendante de n
   Ici
   $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}U_n + 2 - 3}{U_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}U_n - 1}{U_n - 3}$$
   Et ainsi
   $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1}{3}(U_n - 3)}{U_n - 3} = \frac{1}{3}$$
   On en déduit que la suite (V_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$
2. Ainsi (V_n) peut s'écrire sous la forme $V_n = V_0 \times q^n = (U_0 - 3) \times (\frac{1}{3})^n = 3 \times (\frac{1}{3})^n$
   Et par suite $U_n = V_n + 3 = 3 \times (\frac{1}{3})^n + 3$